Remediation series numeriques

Exercice 1 - Majorations et équivalences - 1

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\mathbf{1}.\ u_n = \frac{n}{n^3+1} \qquad \mathbf{2}.\ u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \qquad \mathbf{3}.\ u_n = n\sin(1/n)$$
$$\mathbf{4}.\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad \mathbf{5}.\ u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1} \qquad \mathbf{6}.\ u_n = \frac{1}{n!}$$
$$\mathbf{7}.\ u_n = \frac{3^n+n^4}{5^n-2^n}$$

Exercice 2 - Equivalents et majorations - 3

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\mathbf{1}.\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} \qquad \mathbf{2}.\ u_n = a^n n!,\ a \in \mathbb{R} \qquad \mathbf{3}.\ u_n = ne^{-\sqrt{n}}$$
$$\mathbf{4}.\ u_n = \frac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}. \qquad \mathbf{5}.\ \ u_n = \frac{\ln n}{\ln(e^n-1)} \qquad \mathbf{6}.\ \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}.$$

Exercice 3 - Puissances, logarithmes et factorielles

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\mathbf{1}.\ u_n = \frac{\ln(n^n)}{n!} \qquad \mathbf{2}.\ u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \qquad \mathbf{3}.\ u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

Exercice 4 - Inclassables

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = 1/n$ si n est un carré, et 0 sinon.
2. $u_n = \arctan(n+a) - \arctan(n)$, avec $a > 0$.

Exercice 5 - Cas limite de la règle de d'Alembert

1. Soit, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}$. Quelle est la limite de u_{n+1}/u_n? Montrer que la suite (nu_n) est croissante. En déduire que la série de terme général u_n est divergente.
2. Soit, pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = \dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}$. Quelle est la limite de v_{n+1}/v_n? Montrer que, si $1 < \alpha < 3/2$, on a $(n+1)^\alpha v_{n+1} \leq n^\alpha v_n$. En déduire que la série de terme général v_n converge.

Exercice 6 - Sans le critère des séries alternées

On considère la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^k}{k}$, et on note, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k},\ u_n = S_{2n},\ v_n = S_{2n+1}.$$

1. La série est-elle absolument convergente?
2. Démontrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Conclure que la série est convergente.

Exercice 7 - Pour commencer!

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\mathbf{1}.\ u_n = \frac{\sin n^2}{n^2} \qquad \mathbf{2}.\ u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$
$$\mathbf{3}.\ u_n = \frac{\cos(n^2\pi)}{n\ln n}$$

Exercice 8 - Convergence absolue

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n}\int_0^1 t^n f(t)dt$ est convergente.

Exercice 9 - Formule de Stirling

1. Soit (x_n) une suite de réels et soit (y_n) définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$. Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite (x_n) sont de même nature.
2. On pose (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
3. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :
$$n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

Exercice 10 - Vrai/Faux

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n > 0$ et si la série $\sum u_n$ converge, alors u_{n+1}/u_n a une limite strictement inférieure à 1.
2. Si $u_n > 0$ et si la série $\sum u_n$ converge, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si $u_n > 0$, et si la série $\sum u_n$ converge, alors la série de terme général u_n^2 converge.
4. Si $(-1)^n n u_n \to 1$, la série $\sum u_n$ converge.
5. Si $(-1)^n n^2 u_n \to 1$, la série $\sum u_n$ converge.

Vous avez accès aux corrigés de cette feuille par l'url :
http://www.bibmath.net/ressources/justeunefeuille.php?id=22673