Remédiations espaces vectoriels généralités

Exercice 1 - Combinaisons linéaires?

Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i?

1. $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1,2)$, $u_1 = (1,-2)$, $u_2 = (2,3)$;
2. $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1,2)$, $u_1 = (1,-2)$, $u_2 = (2,3)$, $u_3 = (-4,5)$;
3. $E = \mathbb{R}^3$, $u = (2,5,3)$, $u_1 = (1,3,2)$, $u_2 = (1,-1,4)$;
4. $E = \mathbb{R}^3$, $u = (3,1,m)$, $u_1 = (1,3,2)$, $u_2 = (1,-1,4)$ (discuter suivant la valeur de m).

Exercice 2 - Combinaisons linéaires?

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P(X) = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $P_1(X) = 8X^3 - 5X^2 + 1$ et $P_2(X) = X^2 + 7X - 2$?
2. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions sin et cos?

Exercice 3 - Dans un espace de fonctions

Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est-ce que la fonction arctan est combinaison linéaire de e^{x^2}, e^{-x} et sin?

Exercice 4 - Pour bien commencer...

Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^4$ pour la dernière famille)?

1. (u,v) avec $u = (1,2,3)$ et $v = (-1,4,6)$;
2. (u,v,w) avec $u = (1,2,-1)$, $v = (1,0,1)$ et $w = (0,0,1)$;
3. (u,v,w) avec $u = (1,2,-1)$, $v = (1,0,1)$ et $w = (-1,2,-3)$;
4. (u,v,w,z) avec $u = (1,2,3,4)$, $v = (5,6,7,8)$, $w = (9,10,11,12)$ et $z = (13,14,15,16)$.

Exercice 5 - Deux par deux, et par trois?

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.

1. Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre. Faire de même pour (v_1, v_3), puis pour (v_2, v_3).
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre?

Exercice 6 - Complétion de familles libres

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1,-1,1),\ v_2 = (2,-2,2),\ v_3 = (2,-1,2).$$

1. Peut-on trouver un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit libre? Si oui, construisez-en un.
2. Même question en remplaçant v_2 par v_3.

Exercice 7 - Avec des fonctions

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Étudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :

1. $(\sin x, \cos x)$;
2. $(\sin 2x, \sin x, \cos x)$;
3. $(\cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x)$;
4. $(x, e^x, \sin(x))$.

Exercice 8 - Familles de fonctions

Démontrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. $(x \mapsto e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$;
2. $(x \mapsto |x-a|)_{a\in\mathbb{R}}$;
3. $(x \mapsto \cos(ax))_{a>0}$;
4. $(x \mapsto (\sin x)^n)_{n\geq 1}$.

Exercice 9 - A partir d'une famille libre

Dans $\mathbb{R}^n$, on considère une famille de 4 vecteurs libres (e_1, e_2, e_3, e_4). Les familles suivantes sont-elles libres?

1. $(e_1, 2e_2, e_3)$;
2. (e_1, e_3);
3. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_3 + e_4)$;
4. $(2e_1 + e_2, e_1 - 2e_2, e_4, 7e_1 - 4e_2)$.

Exercice 10 - Opération

Soit E un espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n \in E$. Pour $k = 1, \dots, n$, on pose $v_k = u_1 + \cdots + u_k$. Démontrer que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre si et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre.

Exercice 11 - Opération

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Pour $k = 1, \dots, n-1$, on pose $w_k = v_k + v_{k+1}$ et $w_n = v_n + v_1$. Etudier l'indépendance linéaire de la famille $(w_1, \dots, w_n)$.

Exercice 12 - Polynômes à degrés échelonnés

Soit $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non nuls, à degrés échelonnés, c'est-à-dire $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$. Montrer que $(P_1, \dots, P_n)$ est une famille libre.

Exercice 13 - Est-ce un sous-espace vectoriel?

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels?

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 0\}$;
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 2\}$;
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = 2z = 4t\}$;

4. $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 0\}$;
5. $E_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x^2\}$;
6. $E_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x+3y-5z = 0\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z = 0\}$;
7. $E_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x+3y-5z = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z = 0\}$.

Exercice 14 - Est-ce un sous-espace vectoriel (matrices)?

Déterminer si les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$:

1. $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) :\ ad - bc = 1 \right\}$;
2. $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) :\ x_1 + x_2 = x_4 \right\}$;
3. $E_3 = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) :\ {}^tA = A \right\}$.

Exercice 15 - Est-ce un sous-espace vectoriel?

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dire dans les cas suivants si la partie V de E est un sous-espace vectoriel de E.

1. V est l'ensemble des fonctions bornées.
2. V est l'ensemble des fonctions majorées.
3. V est l'ensemble des fonctions paires.
4. V est l'ensemble des fonctions paires ou impaires.

Exercice 16 - Réunion de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 17 - D'un système générateur à un système d'équations...

Donner un système d'équations des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants :

1. $u_1 = (1,2,3)$;
2. $u_1 = (1,2,3)$ et $u_2 = (-1,0,1)$;
3. $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (2,1,0)$ et $u_3 = (1,0,1)$.

Exercice 18 - D'un système d'équations à un système générateur...

Trouver un système générateur des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+2y-z = 0\}$;
2. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-y+z = 0 \text{ et } 2x-y-z = 0\}$.

Exercice 19 - Forme la plus adaptée

1. Soit $F_1 = \mathrm{vect}(u_1,u_2)$ où $u_1 = (1,2,3)$ et $u_2 = (-1,0,1)$. Déterminer a,b,c dans $\mathbb{R}$ tels que

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ ax+by+cz = 0\}.$$

2. Soit $F_2 = \text{vect}(v_1)$ où $v_1 = (7,4,1)$. Déterminer a,b,c,a',b',c' dans $\mathbb{R}$ tels que
$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ ax+by+cz=0 \text{ et } a'x+b'x+c'z=0\}.$$
3. Soit $F_3 = \text{vect}(v_2)$ où $v_2 = (1,0,1)$. Déterminer a,b,c,a',b',c' dans $\mathbb{R}$ tels que
$$F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ ax+by+cz=0 \text{ et } a'x+b'x+c'z=0\}.$$
4. En utilisant la description la plus adaptée de chacun des sous-espaces vectoriels, répondre aux questions suivantes :
   (a) A-t-on $F_2 \subset F_1$? A-t-on $F_3 \subset F_1$?
   (b) A-t-on $F_1 \cap F_2 = \{0\}$? A-t-on $F_1 \cap F_3 = \{0\}$?
   (c) Trouver une famille génératrice de $F_1 + F_2$. Trouver une famille génératrice de $F_1 + F_3$.

Exercice 20 - Coïncidence de sous-espaces

Dans les exemples suivants, démontrer que les sous-espaces F et G de E sont égaux.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $u_1 = (1,1,3)$, $u_2 = (1,-1,-1)$, $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (2,-1,0)$, $F = \text{vect}(u_1,u_2)$ et $G = \text{vect}(v_1,v_2)$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{vect}\big((2,3,-1),(1,-1,-2)\big)$ et $G = \text{vect}\big((3,7,0),(5,0,-7)\big)$.
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y+z=0\}$, $u_1 = (1,1,-2)$, $u_2 = (1,-4,3)$ et $G = \text{vect}(u_1,u_2)$.
4. $E = \mathbb{R}^4$,
$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x+y+z+t=0 \text{ et } x-y+2z-2t=0\}$$
$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ 5x+y+7z-t=0 \text{ et } x-3y+3z-5t=0\}.$$

Lien vers la feuille corrigé automatiquement créée :
http://www.bibmath.net/ressources/justeunefeuille.php?id=21817