1 Résolution d'équations/inéquations

Définition 1.1 – Résolution d'une équation/inéquation

Résoudre une équation (*resp. une inéquation*) d'inconnue x consiste à trouver toutes les valeurs de x appelées qui vérifient l'équation (*resp. l'inéquation*).
Ces valeurs sont appelées **solutions** de l'équation/inéquation.

Exemple 1.1 :

Soit (E) l'équation $2x-3=1$.

1. 1 est-il solution de (E) ? Non, car $2\times 1-3=-1\neq 1$.
2. 2 est-il solution de (E) ? Oui, car $2\times 2-3=1$.

I Équation

I.1 Règles de manipulation

Propriété 1.1

À partir d'une équation, on obtient une équation équivalente si :

- on ajoute ou retranche un même nombre à chaque membre.
- on multiplie ou on divise par un même nombre chaque membre.

Exemple 1.2 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $2x-6=0$.

$$\begin{aligned} 2x-6=0 &\Leftrightarrow 2x=6 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{6}{2} \\ &\Leftrightarrow x=3 \end{aligned}$$

$S=\{3\}$.

2. $-3x-5=2$.

$$\begin{aligned} -3x-5=2 &\Leftrightarrow -3x=2+5 \\ &\Leftrightarrow -3x=7 \\ &\Leftrightarrow x=-\frac{7}{3} \end{aligned}$$

$S=\left\{-\frac{7}{3}\right\}$.

1 Résoudre les équations suivantes.

1. $x+12=7$
2. $5=x-10$
3. $3{,}2+x=6$
4. $-4x=12$
5. $\frac{x}{12}=-7$
6. $\frac{4+x}{2}=3$
7. $\frac{-1+x}{5}=2-x$
8. $99x=850-x$
9. $\frac{1}{3}x+3=6$

1. $S=\{-5\}$.
2. $S=\{15\}$.
3. $S=\{2{,}8\}$.
4. $S=\{-3\}$.
5. $S=\{-84\}$.
6.

$$\begin{aligned} \frac{4+x}{2}=3 &\Leftrightarrow 4+x=6 \\ &\Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

$S=\{2\}$.

7.

$$\begin{aligned} \frac{-1+x}{5}=2-x &\Leftrightarrow -1+x=5(2-x) \\ &\Leftrightarrow -1+x=10-5x \\ &\Leftrightarrow 6x=11 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{11}{6} \end{aligned}$$

$S=\left\{\frac{11}{6}\right\}$.

8. $S=\{8{,}5\}$.
9. $S=\{9\}$.

I.2 Produit nul

Propriété 1.2 – Résolution d'une équation produit nul

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

Exemple 1.3 :

Résoudre l'équation $(x+1)(-2x+4)=0$.

$$\begin{aligned}(x+1)(-2x+4)=0 &\Leftrightarrow x+1=0 \quad \text{ou} \quad -2x+4=0\\ &\Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ou} \quad -2x=-4\\ &\Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ou} \quad x=2\end{aligned}$$

Ainsi, $S=\{-1;2\}$.

2 Résoudre les équations suivantes.

1. $(x+1)(x-2)=0$
2. $(-x+1)(x+4)=0$
3. $(2x+8)(5+x)=0$
4. $\frac{1}{3}x(x-1)=0$
5. $\left(\frac{1}{2}x-1\right)(4-2x)=0$
6. $(\sqrt{2}x-1)(7-x)=0$
7. $(x-\pi)\left(\frac{2}{3}x+6\right)=0$

1.
$$\begin{aligned}(x+1)(x-2)=0 &\Leftrightarrow x+1=0 \quad \text{ou} \quad x-2=0\\ &\Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ou} \quad x=2\end{aligned}$$
Ainsi : $S=\{-1;2\}$.

2.
$$\begin{aligned}(-x+1)(x+4)=0 &\Leftrightarrow -x+1=0 \quad \text{ou} \quad x+4=0\\ &\Leftrightarrow -x=-1 \quad \text{ou} \quad x=-4\\ &\Leftrightarrow x=1 \quad \text{ou} \quad x=-4\end{aligned}$$
Ainsi : $S=\{-4;1\}$.

3.
$$\begin{aligned}(2x+8)(5+x)=0 &\Leftrightarrow 2x+8=0 \quad \text{ou} \quad 5+x=0\\ &\Leftrightarrow 2x=-8 \quad \text{ou} \quad x=-5\\ &\Leftrightarrow x=-4 \quad \text{ou} \quad x=-5\end{aligned}$$
Ainsi : $S=\{-5;-4\}$.

4.
$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x(x-1)=0 &\Leftrightarrow \frac{1}{3}x=0 \quad \text{ou} \quad x-1=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=1\end{aligned}$$
Ainsi : $S=\{0;1\}$.

5.
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}x-1\right)(4-2x)=0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x-1=0 \quad \text{ou} \quad 4-2x=0\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x=1 \quad \text{ou} \quad -2x=-4\\ &\Leftrightarrow x=2 \quad \text{ou} \quad x=2\end{aligned}$$
Ainsi : $S=\{2\}$.

6.
$$\begin{aligned}(\sqrt{2}x-1)(7-x)=0 &\Leftrightarrow \sqrt{2}x-1=0 \quad \text{ou} \quad 7-x=0\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}x=1 \quad \text{ou} \quad -x=-7\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad x=7\end{aligned}$$
Ainsi : $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};7\right\}$.

7.
$$\begin{aligned}(x-\pi)\left(\frac{2}{3}x+6\right)=0 &\Leftrightarrow x-\pi=0 \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}x+6=0\\ &\Leftrightarrow x=\pi \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}x=-6\\ &\Leftrightarrow x=\pi \quad \text{ou} \quad x=-\frac{6}{\frac{2}{3}}\\ &\Leftrightarrow x=\pi \quad \text{ou} \quad x=-6\times\frac{3}{2}\\ &\Leftrightarrow x=\pi \quad \text{ou} \quad x=-9\end{aligned}$$
Ainsi : $S=\{-9;\pi\}$.

II Inéquations

II.1 Intervalles

Définition 1.2 – Intervalle

Soient a et b deux réels.

- On appelle intervalle **fermé** $[a;b]$ l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$.
- On appelle intervalle **ouvert** $]a;b[$ l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$.

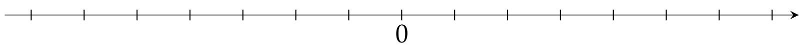
Remarque(s) :

- Les deux crochets ne sont pas nécessairement tous deux fermés ou tous deux ouverts.
  Par exemple, l'intervalle $[1;3[$ est l'ensemble des réels x tels que $1 \leq x < 3$.
- On peut définir un intervalle contenant des valeurs infiniment grande ou infiniment petite à l'aide des symboles $+\infty$ ("plus l'infini") ou $-\infty$ ("moins l'infini").
  Le crochet est systématiquement **ouvert** lorsque l'on utilise un tel symbole.
  Par exemple, l'intervalle $]-\infty;2]$ est l'ensemble des réels x tels que $x \leq 2$.

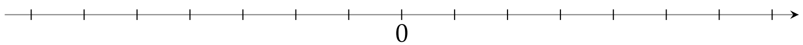
Exemple 1.4 :

Dans chaque cas, dire à quel intervalle appartiennent les réels x vérifiant l'inégalité, puis représenter graphiquement cet intervalle.

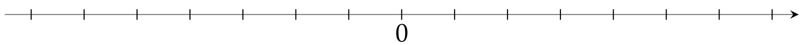
1. $-2 < x < 3$. $x \in]-2;3[$



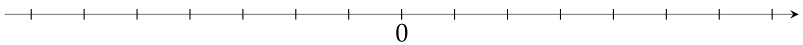
2. $1 \leq x < 5$. $x \in [1;5[$



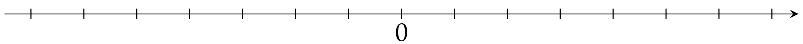
3. $-7 \leq x \leq -1$. $x \in [-7;-1]$



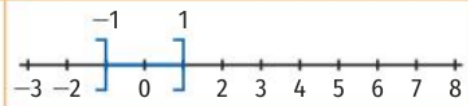
4. $x < 0$. $x \in]-\infty;0[$



5. $x \geq -4$. $x \in [-4;+\infty[$



3 Compléter le tableau suivant :

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$0 < x \leqslant 5$	$x \in]0;5]$	
	$x \in]-3;7[$	
	$x \in]-\infty;4]$	
$3 \leqslant x$		
		
		

4 Compléter avec $\in$ ou $\notin$.

1. $1 \notin]1;2]$.
2. $-2 \in [-3;+\infty[$
3. $\sqrt{2} \in]-1;7[$
4. $\frac{1}{9} \notin \left[\frac{1}{8};2\right[$
5. $4 \notin]-4;4[$
6. $5 \in]-1;+\infty[$
7. $\frac{1}{10} \in]0{,}001;1[$
8. $-2500 \in]-\infty;-2499[$

II.2 Manipulation d'inéquations

Propriété 1.3

1. À partir d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente si :
   - on ajoute ou retranche un même nombre à chaque membre.
   - on multiplie ou on divise chaque membre par un même nombre strictement positif.
2. Si on multiplie ou divise chaque membre par un même nombre strictement négatif, le sens de l'inégalité change.

Exemple 1.5 :

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x + 1 \geq 3$

$$x + 1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$S = [2;+\infty[$.

2. $5x < 6$

$$5x < 6 \Leftrightarrow x < \frac{6}{5}$$

$S = \left]-\infty; \frac{6}{5}\right[$.

3. $-\frac{x+1}{2} > 3$

$$\begin{aligned}-\frac{x+1}{2} > 3 &\Leftrightarrow -(x+1) > 6\\ &\Leftrightarrow -x-1 > 6\\ &\Leftrightarrow -x > 7\\ &\Leftrightarrow x < -7\end{aligned}$$

$S =]-\infty; -7[$.

4. $4x + 7 \leq x + 2$

$$\begin{aligned}4x+7 \leq x+2 &\Leftrightarrow 3x+7 \leq 2\\ &\Leftrightarrow 3x \leq -5\\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{3}\end{aligned}$$

$S = \left]-\infty; -\frac{5}{3}\right]$.

5 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $x - 5 \leq 1$.

$x - 5 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 6$.
Donc $S =]-\infty; 6]$.

2. $4x + 2 \geq 1$.

$$\begin{aligned}4x+2 \geq 1 &\Leftrightarrow 4x \geq -1\\ &\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Donc $S = [-\frac{1}{4}; +\infty[$.

3. $-\frac{1}{2}x + 1 < 4$.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}x+1 < 4 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x < 3\\ &\Leftrightarrow x > 3 \times (-2)\\ &\Leftrightarrow x > -6\end{aligned}$$

Donc $S =]-6; +\infty[$.

4. $-8x + 2 \geq 2x + 1$.

$$\begin{aligned}-8x+2 \geq 2x+1 &\Leftrightarrow -8x-2x \geq 1-2\\ &\Leftrightarrow -10x \geq -1\\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{10}\end{aligned}$$

Donc $S =]-\infty; \frac{1}{10}]$.

II.3 Tableaux de signes

Pour résoudre des inéquations plus complexes sous forme de produit et/ou de quotients d'expressions, il devient nécessaire de se donner un outil permettant d'étudier et rendre compte du signe de chaque expression.
On utilise alors un tableau de signes dans lequel on note le signe de chaque expression suivant les valeurs de la variable, puis on applique la règle des signes.

Exemple 1.6 :

Résoudre l'inéquation $(4x + 2)(-7x - 14) \leq 0$.

$$\begin{aligned}4x+2 > 0 &\Leftrightarrow 4x > -2\\ &\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-7x-14 > 0 &\Leftrightarrow -7x > 14\\ &\Leftrightarrow x < -2\end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x + 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$-7x + 14$		$+$	0	$-$		$-$	
$(4x + 2)(-7x - 14)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Grâce au tableau ci-dessus, on voit que $(4x+2)(-7x-14) \leq 0$ si $x \in]-\infty; -2]$ ou si $x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Autrement dit l'ensemble des solutions est $S =]-\infty;-2] \cup \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Exemple 1.7 :

Résoudre l'inéquation $\frac{3x+6}{x-5} \geq 0$.

$$3x+6>0 \Leftrightarrow 3x>-6$$
$$\Leftrightarrow x>-2$$

$$x-5>0 \Leftrightarrow x>5$$

Nous pouvons dresser le tableau de signes comme dans l'exemple précédent, mais nous devons faire attention au fait que l'expression $x-5$ est au dénominateur, et qu'on ne peut pas diviser par 0.
On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$3x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3x+6}{x-5}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Ainsi :

$$S =]-\infty;-2] \cup]5;+\infty[$$

Le crochet est fermé en -2 car -2 est bien une solution de l'inéquation puisque $\frac{3x+6}{x-5}$ vaut 0 si on remplace x par -2.
En revanche, le crochet est ouvert en 5, car 5 n'est pas solution, il s'agit d'une valeur interdite ! On l'indique à l'aide d'une double barre.

6 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $(x+1)(x+2)>0$
2. $(1-x)(x+3) \geq 0$
3. $x(2x+1)<0$
4. $(6x+18)(4-x) \leq 0$
5. $\frac{2+x}{3x-9} \leq 0$
6. $\frac{\frac{1}{2}x+4}{3x-1} > 0$
7. $\frac{6x+1}{x} \geq 0$
8. $\frac{2x-2}{7x+1} < 0$

1. $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ $\qquad$ $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+1)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi : $\boxed{S =]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[}$.

2. $1-x>0 \Leftrightarrow -x>-1$ $\qquad$ $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$
$\Leftrightarrow x<1$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-x)(x+3)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Ainsi : $\boxed{S = [-3;1]}$.

3. $$2x+1>0 \Leftrightarrow 2x>-1$$
$$\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(2x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi : $\boxed{S = \left]-\frac{1}{2};0\right[}$.

4. $6x+18>0 \Leftrightarrow 6x>-18$ $\qquad$ $4-x>0 \Leftrightarrow -x>-4$
$\Leftrightarrow x>-3$ $\qquad$ $\Leftrightarrow x<4$

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$6x+18$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(6x+18)(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi : $\boxed{S =]-\infty;-3] \cup [4;+\infty[}$.

5. $2+x>0 \Leftrightarrow x>-2$ $\qquad$ $3x-9>0 \Leftrightarrow 3x>9$
$\Leftrightarrow x>3$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2+x}{3x-9}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi : $\boxed{S = [-2;3[}$.

6.

$$\frac{1}{2}x+4>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x>-4$$
$$\Leftrightarrow x>-8$$

$$3x-1>0 \Leftrightarrow 3x>1$$
$$\Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$		-8		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$\frac{1}{2}x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{\frac{1}{2}x+4}{3x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi : $\boxed{S =]-\infty;-8[\cup \left]\frac{1}{3};+\infty\right[}$.

7.

$$6x+1>0 \Leftrightarrow 6x>-1$$
$$\Leftrightarrow x>-\frac{1}{6}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{6}$		0		$+\infty$
$6x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{6x+1}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi : $\boxed{S = \left]-\infty;-\frac{1}{6}\right] \cup]0;+\infty[}$.

8.

$$2x-2>0 \Leftrightarrow 2x>2$$
$$\Leftrightarrow x>1$$

$$7x+1>0 \Leftrightarrow 7x>-1$$
$$\Leftrightarrow x>-\frac{1}{7}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{7}$		1		$+\infty$
$2x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$7x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x-2}{7x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Ainsi : $\boxed{S = \left]-\frac{1}{7};1\right[}$.

7 Un cactus est planté alors qu'ils mesure 3 cm. Soit n le nombre d'années à partir du moment où le cactus est planté. On sait que ce cactus grandit de 0,6 cm par an. On cherche le nombre d'années qu'il faudra à ce cactus pour atteindre la taille de 231 cm.

1. Modéliser le problème.
2. Résoudre le problème.

1. On cherche n tel que : $3+0{,}6n \geq 231$.
2.

$$3+0{,}6n \geq 231 \Leftrightarrow 0{,}6n \geq 231-3$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{228}{0{,}6}$$
$$\Leftrightarrow n \geq 380$$

Donc il faudra 380 années à ce cactus pour atteindre la taille de 231 cm.

8 Deux entreprises de transport proposent les tarifs suivants :

- 110 € au départ puis 1,75 €/km.
- 125 € au départ puis 1,50 €/km.

On vous demande à partir de quel kilométrage le tarif du second transporteur est plus avantageux ?

1. Modéliser le problème.
2. Répondre à la question de l'énoncé.

1. Soit x le nombre de kilomètres parcourus.
   Le prix de la première entreprise est modélisé par : $110+1{,}75x$
   Le prix de la seconde entreprise est modélisé par : $125+1{,}5x$. Pour répondre au problème, il faut résoudre : $125+1{,}5x < 110+1{,}75x$.

2.

$$\begin{aligned} 125 + 1{,}5x < 110 + 1{,}75x &\Leftrightarrow 1{,}5x - 1{,}75x < 110 - 125 \\ &\Leftrightarrow -0{,}25x < -15 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{-15}{-0{,}25} \\ &\Leftrightarrow x > 60 \end{aligned}$$

Donc le tarif du second transporteur est plus avantageux à partir de 60 km.