Exercices, niveau 2 : intégration sur un segment.

Glossaire : ➪ désigne les exercices à faire chez soi, à correction rapide, ➨ désigne les exercices à faire chez soi, mais dont nous ferons la correction complète, ✳ désigne les exercices de niveau 2.

Exercice 0 ➪

Donner une primitive, sans se soucier des ensembles de définition, de la fonction f dans les cas suivantes :

1. $f(x) = x^2 - 3 + 1/x$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}$
3. $f(x) = \dfrac{4}{x^n} + e^{-3x}$ avec $n \geqslant 2$.
4. $f(x) = \dfrac{3}{e^{2x}} + \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
5. $f(x) = \dfrac{ln(x)}{x} + \dfrac{2x}{1+x^2}$
6. $f(x) = sin(e^x)e^x + \dfrac{cos(ln(x))}{x}$
7. $f(x) = cos(x^2+x+1)(x+1/2)$
8. $f(x) = ln(x+ln(x)) \times \dfrac{x+1}{x}$
9. $f(x) = \dfrac{1}{(2x-3)^4}$
10. $f(x) = (1+tan(cos(x))^2)sin(x)$

Exercice 1 ➨

Calculer les intégrales suivantes après avoir justifié leur existence :

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}(t-2\sqrt{t})dt$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^2 |t|dt$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}dt$ (4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{e^t+2}dt$ (5) $\displaystyle\int_e^3 \frac{dt}{t\ln(t)}$

(6) $\displaystyle\int_0^2 |t^2-1|dt$ (7) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t}dt$ (8) $\displaystyle\int_0^3 \max(t,1)dt$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer son signe.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer f'.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = f(x) - \ln(x)$. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$ en déduire son signe.
4. En déduire les limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 3 ➨

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(t)dt \geq 0$. Comment justifier $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(t)dt > 0$?

Exercice 4 ➡

Soit $f(x) = \dfrac{3x^2+4x-25}{x^2+x-6}$.

1. Sur quel(s) intervalle(s) cette fonction admet-elle des primitives ?
2. Trouver a, b et c réels tels que $\forall x \in]-3,2[, f(x) = a + \dfrac{b}{x+3} + \dfrac{c}{x-2}$, puis en déduire la primitive de f sur $]-3,2[$ qui s'annule en 1.

Exercice du cours ➡

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{2dt}{t(t+2)} \ , \ \int_0^{\pi/2} sin(t)cos^2(t)\ dt \ \ et \ \ \int_2^4 \frac{2dt}{t(t^2-1)} \ \ et \ \ \int_0^{\pi/2} cos^3(t)$$

On remarquera que $sin(t)cos^2(t) = \frac{1}{2}sin(2t)cos(t) = ...$ et on montrera que $cos(3t) = 4cos(t)^3 - 3cos(t)$

Exercice 5

Les deux questions sont indépendantes.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
   (a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq u_n \leq \ln(n) + 1$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln n}$.
2. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\ln(k) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \ln(t)dt \leq \ln(k+1)$ puis en déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\int_1^n \ln(t)dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln(t)dt$.

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{t+1}\ dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq I_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$. Que peut-on en déduire pour la suite (I_n) ?

Exercice 7 ⇨

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$. Etudier le sens de variation de la suite (I_n).

Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes en intégrant par parties :

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2\cos(t)dt$ (2) $\displaystyle\int_0^4 te^t dt$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt$ (4) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)dt$

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x}dx$ pour tout entier $n \geq 0$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$.
2. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 10

Soit n un entier naturel non nul. On pose $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln^n(x)dx$.

1. Calculer I_1.
2. (a) Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [1,e]$, $0 \leq \ln(x) \leq \dfrac{x}{e}$.
   (d) En déduire un encadrement de I_n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3}I_n$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 11

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

(1) $\displaystyle\int_0^1 (t+1)^5(t-2)dt$ (2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{t^3+8}}dt$ (avec $u = t^3+8$)

(3) $\displaystyle\int_0^a \frac{dt}{t^2+a^2}$ où a est un réel positif (4) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ (avec $u = \sqrt{t^2-1}$)

Exercice 12

Déterminer la limite des suites suivantes définies pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} \qquad v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 13

Pour tout entier n, on note $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$.

1. Pour tout entier naturel n, calculer la valeur de $u_{n+2} + u_n$.
2. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. Montrer que (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite.

Exercice 14

On considère la fonction $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^4}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier la parité de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
3. En déduire les variations de f.
4. Montrer : $\forall x > 0,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^4}$. En déduire la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$. Tracer l'allure du graphe de f.

Quelques exercices supplémentaires ➨

1. Calculer $\int_0^1 te^{-t^2}\, dt$ et $\int_0^{\pi/4} tan(t)\, dt$
2. On pose $I = \int_0^{\pi} tcos(t)^2\, dt$ et $J = \int_0^{\pi} tsin(t))^2\, dt$.
   Calculer I en utilisant le changement de variables $u = \pi - t$. Calculer J en calculant $I + J$.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{n-1} k^{\alpha}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, et
   $$I_n = \int_1^e ln(t)^n\, dt$$
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
   Effectuer le changement de variable $u = ln(t)$ pour montrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$
   Donner la limite de (nI_n).

Défi 1 ✵

(a) Montrer que pour tout réel x, on a $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

(b) Montrer : $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

Défi 2 ✵

Soit $f \in C^0([-1,1])$ telle que $\int_{-1}^1 f(t)\, dt = 0$. Montrer que f admet un point fixe sur $[-1,1]$.

Défi 3 ✳

Trouver une primitive de $Arctan$.
Soit $f \in C^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^{2\pi} f(t)sin(nt)\,dt$ tend vers 0.

Défi 4 ✳

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues avec g positive non nulle. On pose m et M les min et max de f.

(a) Pour m et M sont bien définies ?

(b) Démontrer que $m\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant M\int_a^b g(t)\,dt$.

(c) En déduire l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t) = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$

(d) Justifier que pour tout fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(0)ln(2)$$

Défi 5 ✳

On pose

$$F : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{\pi/2} exp(-xsin(t))\,dt$$

(a) Montrer que F est bien définie et décroissante.

(b) Justifier que pour tout $t \in [0;\pi/2]$, $\dfrac{2t}{\pi} \leqslant sin(t)$.

(c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, $0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2x}$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

(d) i. Pour tous réels positifs a, b, montrer que $|e^{-a} - e^{-b}| \leqslant |a-b|$

ii. En déduire que pour tous réel positifs x, y, $|F(x) - F(y)| \leqslant |x-y|$.

iii. Justifier alors la continuité de F sur $\mathbb{R}_+$.

Défi 6 ✳

(a) i. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\int_0^{\pi}(t^2 - 2\pi t)cos(kt)\,dt = \dfrac{2\pi}{k^2}$.

ii. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{itk}$

En déduire que pour tout $t \in]0,\pi[$,

$$\sum_{k=1}^{n} cos(kt) = \frac{1}{2}(\frac{sin(\frac{2n+1}{2}t)}{sin(t/2} - 1)$$

(b) On pose $g : t \in]0:\pi] \mapsto \dfrac{t^2 - \pi t}{4\pi sin(t/2)}$

Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} g(t)sin(\frac{2n+1}{2}t)\,dt$$

(c) i. Justifier que g est prolongeable par continuité en posant $g(0) = -1$.

ii. A. À l'aide d'une double intégration par parties, vérifier que pour tout x :

$$\frac{1}{2}\int_0^x t^2 cos(t-x)\, dt = x - sin(x)$$

B. En déduire l'inégalité $|sin(x) - x| \leqslant \frac{x^3}{6}$ pour tout $x \geqslant 0$.

C. Prouver que g est dérivable en 0. Préciser $g'(0)$.

(d) En admettant que $g \in C^1$, conclure que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \to \frac{\pi^2}{6}$$