HEC ECS 1 :
Les suites numériques

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1. On appelle suite réelle toute application u de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. $u : n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in \mathbb{R}$.
On notera la suite u ou (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
u_n est appelé terme général de la suite (u_n).

Remarque 1.2.
1. Attention à ne pas confondre ces deux objets : (u_n) qui est une application, et u_n qui est un réel. Par exemple, on n'écrit pas "u_n est croissante" , mais "(u_n) (sous-entendu la suite) est croissante".
2. On définit les suites complexes comme les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

1.2 Opérations sur les suites

Définition 1.3. Soit a et b deux suites réelles et λ un réel.
On appelle somme des suites a et b la suite notée $a+b$ de terme général $a_n + b_n$.
On appelle multiplication de la suite a par le réel λ la suite notée $\lambda.a$ de terme général $\lambda.a_n$.
On appelle produit des suites a et b la suite notée $a.b$ de terme général $a_n.b_n$.

1.3 Sens de variation

Définition 1.4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, on dit que :
(u_n) est une suite **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
(u_n) est une suite **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
(u_n) est une suite **monotone** si (u_n) est croissante ou décroissante.
(u_n) est une suite **constante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.
(u_n) est une suite **strictement croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
(u_n) est une suite **strictement décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.
(u_n) est une suite **strictement monotone** si (u_n) est strictement croissante ou strictement décroissante.
(u_n) est une suite **stationnaire** si $\exists p \in \mathbb{N} | \forall n \geq p$, $u_{n+1} = u_n$ (c'est à dire si elle est constante à partir d'un certain rang).

Remarque 1.5. Attention : une suite peut ne pas être monotone, c'est-à-dire ni croissante, ni décroissante, comme par exemple la suite $((-2)^n)$.

Remarque 1.6. Pour déterminer le sens de variation d'une suite on peut :
— Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
— Dans le cas où $u_n > 0$, étudier si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est inférieur ou supérieur à 1.

Par exemple : déterminons le sens de variation des suites définies par :

1. $u_n = \sum_{k=0}^{n} 2e^{-k}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} 2e^{-k} - \sum_{k=0}^{n} 2e^{-k} = 2e^{-(n+1)} > 0$
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$, et donc la suite est strictement croissante.
2. $v_n = (n+2)!e^{-n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, (on remarque que $v_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+3)!e^{-n-1}}{(n+2)!e^{-n}} = (n+3)e^{-1} = \dfrac{n+3}{e} > 1$ car $e < 1$.
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ et comme $v_n > 0$ pour tout n, alors $v_{n+1} > v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc (v_n) est strictement croissante.
3. $w_{n+1} = w_n^2 - 3w_n + 4$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $w_0 = -2$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = w_n^2 - 4w_n + 4 = (w_n - 2)^2 \geqslant 0$.
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} \geqslant w_n$, et donc la suite (w_n) est croissante.

1.4 Majorant et minorant

Définition 1.7. (u_n) est une suite **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R} | \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. On dit alors que M est un **majorant** de la suite (u_n) et la partie de réels $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majorée par M.

(u_n) est une suite **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R} | \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. On dit alors que m est un **minorant** de la suite (u_n) et la partie de réels $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est minorée par m.

(u_n) est **bornée** si $\exists M \in \mathbb{R} | \forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

1.5 Propriété vraie à partir d'un certain rang

Etant donnée une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un entier n_0 et une propriété $\mathcal{P}$, on dit que la suite (u_n) vérifie la propriété $\mathcal{P}$ à partir du rang n_0 lorsque la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

On dit que une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété $\mathcal{P}$ à partir d'un certain rang lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite (u_n) vérifie la propriété $\mathcal{P}$ à partir du rang n_0.

Exemple 1.8. La suite $(n^2 - 10n - 25)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang. La suite $(n^3 - 200n - 48)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang.

2 Convergence et divergence de suites

2.1 Convergence

Définition 2.1. Une suite réelle (u_n) converge vers le réel l lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les réels u_n à partir d'un certain rang.

Un intervalle ouvert contenant l pouvant être pris sous la forme $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0$, $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$ (ce qui équivaut à $|u_n - l| < \varepsilon$).

Définition 2.2. Une suite réelle est dite **convergente** lorsqu'elle a une limite finie l. Sinon, elle est dite **divergente**.

Exemple 2.3. Montrons que $(\frac{1}{n})$ converge vers 0 :
Soit $\varepsilon > 0$, $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ (on utilise la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$).
Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N (ici $N = \lfloor \varepsilon \rfloor + 1$ convient) tel que $\forall n \geqslant N$, $|\frac{1}{n} - 0| \leqslant \varepsilon$

Graphiquement, on peut représenter ceci de la manière suivante :

Exercice 1. Écrire la négation de $u_n \to l$ avec des quantificateurs.
Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier naturel $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 2.4. Une suite stationnaire est convergente mais la réciproque est fausse.
Soit (u_n) une suite stationnaire alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n = l$.
Et donc : $\forall\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - l| = 0 \leqslant \varepsilon$.
Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$.

Un contre exemple à la réciproque : $u_n = \frac{1}{n}$.

Proposition 2.5. *Si une suite converge alors la limite est unique*

Démonstration. On considère la suite (u_n). Supposons que la suite converge vers l et converge vers l'.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ et :
il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geqslant n_1$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$
Ainsi pour tout $n \geqslant max(n_0, n_1)$, $|l - l'| = |u_n - l' + l - u_n| \leqslant |u_n - l'| + |l - u_n| \leqslant 2\varepsilon$
Ainsi, $\forall\varepsilon > 0$, $|l - l'| \leqslant 2\varepsilon$ et donc $l = l'$. □

2.2 Suites bornées et suites convergentes

Proposition 2.6. *Toute suite convergente est bornée.*
La réciproque est fausse

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergeante vers l.
En prenant $\varepsilon = 1$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l \leqslant 1$ c'est à dire $-1+l \leqslant u_n \leqslant l+1$.
Ainsi (u_n) est majorée par $max(u_0, u_1, ..., u_{n_0-1}, 1+l)$ et minorée par $min(u_0, u_1, ..., u_{n_0-1}, -1+l)$.

Pour la réciproque, un contre exemple est $((-1)^n)_n$ qui est bornée mais non convergente. ☐

2.3 Divergente vers une limite infinie

Définition 2.7. Une suite réelle (u_n) diverge $+\infty$ lorsque tout intervalle du type $]A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient tous les réels u_n à partir d'un certain rang.

autrement dit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ u_n > A$.

Remarque 2.8. Attention, une suite peut converger, diverger vers ∞ ou diverger grossièrement (par exemple $((-1)^n)$).

2.4 Suites de référence et limites

Proposition 2.9. *Soit q un réel. On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} n'existe\ pas & lorsque\ q \leq -1 \\ 0 & lorsque\ -1 < q < 1 \\ 1 & lorsque\ q = 1 \\ +\infty & lorsque\ q > 1 \end{cases}$

Soit α un réel. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} 0 & lorsque\ \alpha < 0 \\ 1 & lorsque\ \alpha = 1 \\ +\infty & lorsque\ \alpha > 0 \end{cases}$

3 Opérations sur les limites

3.1 Les opérations de bases

Se reporter au tableau concernant les limites de fonctions. Les règles sont les mêmes.
Néanmoins nous ferons la démontration de

Si u et v sont 2 suites convergentes alors $(u.v)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Démonstration. Soient u et v 2 suites convergeant vers l et l'.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ et il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geqslant n_1$, $|v_n - l'| \leqslant \varepsilon$
On remarque que $|u_n v_n - ll'| = |u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)| \leqslant |u_n||v_n - l'| + |l'||u_n - l|$.
On remarque que (u_n) converge donc est bornée (disons par K)
Ainsi pour tout $n \geqslant max(n_0, n_1)$, $|u_n v_n - ll'| \leqslant |u_n||v_n - l'| + |l'||u_n - l| K\varepsilon + |l'|\varepsilon = \varepsilon(K + |l'|)$ (on conclut en choisissant initialement $\dfrac{\varepsilon}{K+|l'|}$ ☐

3.2 La limite de $f(u_n)$

Théorème 3.1. *(admis) Pour a et b dans $\bar{\mathbb{R}}$:* $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \\ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \end{cases} \Rightarrow\ f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$

Exemple 3.2. Donner la limite de $(1+\frac{1}{n})^n$:
$(1+\frac{1}{n})^n = exp(\dfrac{1}{n} ln(1+\dfrac{1}{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} ln(1+\dfrac{1}{n} = 1$.
Ainsi $(1+\frac{1}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\to} e^1$.

3.3 Théorème sur les limites

Théorème 3.3. *Soit α un réel.*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq w_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha \end{cases} \Rightarrow\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

ou :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq w_n \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases} \Rightarrow\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$ c'est à dire $-\varepsilon \leqslant\leqslant v_n - \alpha \leqslant \varepsilon$.
De même, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $|u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$ c'est à dire $-\varepsilon \leqslant\leqslant w_n - \alpha \leqslant \varepsilon$
Ainsi pour tout $n \geqslant max(n_0, n_1)$, $-\varepsilon \leqslant v_n - \alpha \leqslant u_n - \alpha \leqslant w_n - \alpha \leqslant \varepsilon$.
Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$.

Pour le deuxième, on applique le résultat précédent avec $v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $|u_n - \alpha|$ à la place de u_n.
Ainsi $|u_n - \alpha| \to 0$ et donc $u_n \to \alpha$. □

Exemple 3.4. Trouver les limites (après avoir justifier leur existence) des suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 + \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1} \ et\ v_n = \frac{2n^2 - sin(n)}{n^2+1}$$

On remarque que $|u_n - 2| = |\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n} + 1/sqrtn} \to 0$
Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 2$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant sin(n) \leqslant 1$ et donc $-1 + 2n^2 \leqslant 2n^2 - sin(n) \leqslant 1 + 2n^2$ et donc $\frac{-1+2n^2}{n^2+1} \leqslant \frac{2n^2 - sin(n)}{n^2+1} \leqslant \frac{1+2n^2}{n^2+1}$ et ainsi, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1+2n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}+2}{1+\frac{1}{n^2}} = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2n^2}{n^2+1} = 2$.
Ainsi par le th. précédent, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$.

Théorème 3.5. $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, w_n \leq u_n \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{cases} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad et \quad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, w_n \leq u_n \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{cases} \Rightarrow w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Démonstration. Montrons juste le premier.
soit $A \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $w_n \geqslant A$.
Donc pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant w_n A$. □

Théorème 3.6. *Soit (u_n) et (w_n) deux suites convergentes, (u_n) vers α et (w_n) vers β. Si $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \leq u_n$ alors $\beta \leq \alpha$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde $\beta > \alpha$:
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$ $-\varepsilon + \alpha \leqslant u_n \leqslant \varepsilon + \alpha$ et il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_1$ $-\varepsilon + \beta \leqslant v_n \leqslant \varepsilon + \beta$
Aisni pour tout $n \geqslant max(n_0, n_1)$, $-\varepsilon + \beta \leqslant w_n \leqslant u_n \leqslant \varepsilon + \alpha$
Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, $-\varepsilon + \beta \leqslant \varepsilon + \alpha$
Ainsi comme $\frac{\beta - \alpha}{3} > 0$, on peut prendre $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{3}$:
Ainsi $-\frac{\beta-\alpha}{3} + \beta \leqslant \frac{\beta-\alpha}{3} + \alpha$ càd $\frac{2\beta+\alpha}{3} \leqslant \frac{\beta+2\alpha}{3}$ càd $\beta \leqslant \alpha$ ce qui est absurde.
Ainsi $\beta \leqslant \alpha$. □

Remarque 3.7. Si l'inégalité entre u_n et w_n est stricte, la conclusion reste la même : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n < u_n \Rightarrow \beta \leq \alpha$.
Par exemple :
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$ et on sait que (u_n) est convergente. En notant α la limite de (u_n), on peut seulement écrire $0 \leq \alpha \leq 1$, mais pas $0 < \alpha < 1$.

Exemple 3.8. Montrons que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^4 + u_n^2 + 4u_n + 4}$$

tend vers $+\infty$ en montrant que $u_{n+1} \geqslant u_n + 2$
On remarque que, premièrement $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (preuev imédiate par récurrence) et que $u_{n+1} \geqslant \sqrt{u_n^2 + 4u_n + 4} = \sqrt{(u_n+2)^2} = |u_n + 2| = u_n + 2$
Ainsi $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} 2 = 2n$ ainsi par comparaison $u_n \to +\infty$.

Théorème 3.9. *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Si $(u_{2n})_n$ converge vers l et u_{2n+1} converge vers l alors u_n converge vers l.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{2n} - l| \leqslant \varepsilon$:
De même, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_{2n+1} - l| \leqslant \varepsilon$
Ainsi comme n est paire ou impaire, pour tout $n \geqslant max(2n_0, 2n_1 + 1)$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. □

4 Convergence et monotonie

4.1 Le théorème de la limite monotone

Théorème 4.1. *(admis) Toute suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée) converge (vers $sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ (resp. $inf\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$)).*
Une suite croissante non majorée (respectivement décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$).

Démonstration. En effet , on montrera juste que toute suite croissante majorée converge vers $sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$: Soit $\varepsilon > 0$.
On remarque que $s = sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ existe car $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble non vide, majoré.
Comme $s - \varepsilon$ ne majore pas (u_n) alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $s - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant s$
De plus, la suite est croissante (et toujours majorée par s) : pour tout $n \geqslant N$, $s - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant s$.
Ainsi (u_n) converge vers s.

□

Exemple 4.2. Étudier la convergence de la suite définie par $u_{n+1} = u_n + 2u_n^2$ et $u_0 > 0$.
On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2u_n^2 \geqslant 0$. Ainsi la suite (u_n) est croissante.
Ainsi soit (u_n) converge vers un réel fini, soit elle converge vers $+\infty$.
Supposons qu'elle converge vers un réel fini l.
Ainsi $l = l + 2l^2$ et donc $l = 0$.
Or par croissance de (u_n) alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 > 0$ et donc $l = 0$ est absurde.
Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$

Exemple 4.3. Que peut-on dire de $(\sum_{k=1}^{n} u_k)$ si $u_n \geqslant 0$ pour tout n ?
Comme la suite S_n définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ est croissante car pout tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$.
Ainsi soit (S_n) converge vers un réel l ou diverge vers $+\infty$. En déduire que $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})$ converge.
D'après ce qui est ci dessus, il suffit de montrer que la suite est majorée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 2$. Ainsi cette suite converge.

4.2 Les suites adjacentes

Définition 4.4. (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et $(u_n - v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème 4.5. *Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite* α.
De plus, si (u_n) est la suite croissante et (v_n) la suite décroissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \alpha \leq v_n$.

Démonstration. (u_n) est croissante donc soit elle converge vers un réel l soit elle diverge vers $+\infty$. De même pour (v_n) mais vers $-\infty$.
Or si (u_n) converge vers l et (v_n) diverge vers $-\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = +\infty$ ce qui est absurde.
De même, si (v_n) converge vers l' et (u_n) diverge vers $+\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = +\infty$ ce qui est absurde et si (u_n) diverge vers $+\infty$ et (u_n) diverge vers $-\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = +\infty$ ce qui est absurde.

Ainsi il ne reste qu'une solution : (u_n) et (v_n) convergent vers l et l'.
De plus comme $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$ alors $l - l' = 0$ et donc $l = l'$.
Enfin, soit $N \in \mathbb{N}$ quelconque, comme (u_n) est croissante alors pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N$ et donc, comme ce résultat est vraie pour tout $n \geqslant N$, on peut "passer n à la limite" et donc $l \geqslant u_N$.
Ainsi pour tout $N \in \mathbb{N}$, $u_N \leqslant l$. De même pour v_N. □

5 Croissances comparées

Théorème 5.1. *Pour tout $\alpha, \beta, \gamma > 0$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{exp(\gamma n)} = 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{ln(n)^\alpha}{n^\beta} = 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{exp(\gamma n)}{n!} = 0$$

Démonstration. Traitons uniquement le cas de la troisième limite :
Soit $n \in \mathbb{N}$, suffisament grand, et n_0 tel que $\frac{e^\gamma}{n_0} \leqslant 1$ (ainsi pour tout $k \geqslant n_0$, $\frac{e^\gamma}{k} \leqslant 1$) :

$$0 \leqslant \frac{exp(\gamma n)}{n!} = \frac{e^\gamma}{1} \times \frac{e^\gamma}{2} \times \ldots \times \frac{e^\gamma}{n_0} \times \frac{e^\gamma}{n_0+1} \times \ldots \times \frac{e^\gamma}{n} \leqslant \frac{e^\gamma}{1} \times \frac{e^\gamma}{2} \times \ldots \times \frac{e^\gamma}{n_0} \times \frac{e^\gamma}{n} = K\frac{e^\gamma}{n} \to 0$$

Ainsi par le TDG, $\frac{e^{\gamma n}}{n!} \to 0$. □

Exemple 5.2.

1. $\frac{2^n}{n!} \to 0$ par croissance comparée.
2. $ln(n^n)e^{-n}$
   $ln(n^n)e^{-n} = nln(n)e^{-n} = \frac{n^2}{e^n}\frac{ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ par C.C.
3. $\frac{e^{n-5}}{4n^4+3n^3+1} = \frac{e^n}{n^4}\frac{e^{-5}}{4+3/n+1/n^4} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$