Correction remédiation polynômes :

Attention présence de complexes !

Exercice 1 :

On trouve les résultats suivants :

1. Le quotient est X^2+2X+7, le reste est nul;
2. Le quotient est X^2-3X-5, le reste est $X+3$;
3. Le quotient est X^3-X-1, le reste est $X+3$.

Exercice 2 :

Dans les deux cas, on remarquera que R est de degré au plus 1 et s'écrit donc $R(X)=\alpha X+\beta$.

1. Évaluons la relation
$$P(X)=(X-a)(X-b)Q(X)+\alpha X+\beta$$
en a et en b. On trouve le système
$$\begin{cases} \alpha a+\beta &= P(a) \\ \alpha b+\beta &= P(b). \end{cases}$$
On en déduit alors facilement que
$$\alpha=\frac{P(a)-P(b)}{a-b} \text{ et } \beta=\frac{aP(b)-bP(a)}{a-b}.$$
2. Évaluons la relation
$$P(X)=(X-a)^2Q(X)+\alpha X+\beta$$
au point a. On trouve $P(a)=a\alpha+\beta$. Dérivons maintenant la relation précédente :
$$P'(X)=2(X-a)Q(X)+(X-a)^2Q'(X)+\alpha.$$
On évalue à nouveau en a et on trouve que
$$\alpha=P'(a).$$
En revenant à la première équation, on en déduit que $\beta=P(a)-aP'(a)$.

Exercice 3 :

On rappelle qu'on note j le nombre complexe $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. La méthode pour ce type d'exercice est toujours la même. On commence par écrire a priori le résultat de la division euclidienne, par exemple pour le premier polynôme :
$$(X+1)^n-X^n-1=Q(X)(X^2-3X+2)+aX+b,$$
où a et b sont deux réels. On évalue ensuite la relation en les racines du diviseur, qui sont ici 1 et 2. On trouve alors
$$\begin{cases} 2^n-2 &= a+b \\ 3^n-2^n-1 &= 2a+b. \end{cases}$$
Et finalement on résout le système pour trouver a et b, qui sont ici égaux à :
$$\begin{cases} a &= 3^n-2^{n+1}+1 \\ b &= -3^n+2^{n+1}+2^n-3. \end{cases}$$

2. On écrit la même chose,

$$(X+1)^n - X^n - 1 = Q(X)(X^2+X+1) + aX + b,$$

et on utilise cette fois que les racines de X^2+X+1 sont j et j^2. Il suffit ici en réalité d'utiliser l'évaluation en j, sachant que tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme $x+jy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On trouve :

$$(1+j)^n - j^n - 1 = Q(j) \times 0 + aj + b.$$

On distingue ensuite suivant la valeur de n modulo 3, utilisant que

$$(1+j)^n - j^n - 1 = (-1)^n j^{2n} - j^n - 1.$$

- Si $n \equiv 0\ [3]$, alors $j^{2n} = j^n = 1$, et donc on a

  $$(-1)^n - 2 = aj + b$$

  de sorte que le reste est $(-1)^n - 2$.
- Si $n \equiv 1\ [3]$, alors $j^n = j$ et donc $j^{2n} = j^2 = -1-j$, $j^n = j$, ce qui donne

  $$\big((-1)^{n+1} - 1\big)j + \big((-1)^{n+1} - 1\big) = aj + b.$$

  Le reste est donc $\big((-1)^{n+1} - 1\big)(X+1)$.
- Si $n \equiv 2\ [3]$, alors $j^{2n} = j$ et $j^n = j^2 = -1-j$. On trouve

  $$\big((-1)^n + 1\big)j = aj + b.$$

  Le reste est alors $\big((-1)^n + 1\big)X$.

3. On recommence en écrivant

$$(X+1)^n - X^n - 1 = Q(X)(X^2-2X+1) + aX + b,$$

et en remarquant que X^2-2X+1 a pour racine double 1. Si on évalue en 1, on obtient une seule relation, à savoir

$$2^n - 2 = a + b.$$

Pour obtenir une seconde relation, il faut dériver la relation issue de la division euclidienne et l'évaluer à nouveau en 1 (c'est toujours cette méthode qui fonctionne pour une racine double). On trouve :

$$n(X+1)^{n-1} - nX^{n-1} = Q'(X)(X^2-2X+1) + 2Q(X)(X-1) + a,$$

ce qui donne la relation

$$n2^{n-1} - n = a.$$

On retrouve alors sans problèmes b, qui est égal à :

$$b = (2-n)2^{n-1} + n - 2.$$

Exercice 4 :

On réalise la division euclidienne de $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ par $X^2 + 2$, et on trouve :

$$X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2 = (X^2 + 2)(X^2 + X + (\lambda - 2)) + (\mu - 2)X + 6 - 2\lambda.$$

Le polynôme $X^2 + 2$ divise donc $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ si et seulement si le reste est nul, donc si et seulement si $\mu = 2$ et $\lambda = 3$.
Une autre possibilité est de remarquer que les racines de $X^2 + 2$ sont $\sqrt{2}i$ et $-\sqrt{2}i$, et donc que la décomposition en produits d'irréductibles de $X^2 + 2$ est $(X - \sqrt{2}i)(X + \sqrt{2}i)$. Pour que $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ soit divisible par $X^2 + 2$, il faut et il suffit que $\sqrt{2}i$ et $-\sqrt{2}i$ soient racines de $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$. On évalue ce polynôme en $\sqrt{2}i$ et $-\sqrt{2}i$ et on trouve un système linéaire que doit vérifier le couple (λ, μ). On trouve bien sûr la même solution.

Exercice 5 :

Puisque $P' \in \mathbb{R}_2[X]$ et que P' est divisible par $(X-1)^2$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P'(X) = 3a(X-1)^2$. Par intégration, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = a(X-1)^3 + b$. Maintenant, P est divisible par $X + 1$ si et seulement si $P(-1) = 0$. Mais

$$P(-1) = 8a + b = 0 \iff b = -8a.$$

Ainsi, les polynômes recherchées sont ceux qui s'écrivent

$$P(X) = a(X-1)^3 - 8a, \ a \in \mathbb{R}.$$