Correction 04/01/2022 :

Kholle A :
1)

1. a) Si a est une racine d'ordre au moins $n+1$ de P, alors il existe un polynôme Q tel que : $P=(X-a)^{n+1}Q$. Si Q n'est pas le polynôme nul, alors on a : $\deg P = n+1+\deg Q \geq n+1$. C'est absurde car P est élément de E. On en conclut que Q est nécessairement le polynôme nul. Finalement, P est le polynôme nul.

b) Soit P_1, P_2 et Q trois éléments de E et λ un réel.

- On constate que $\varphi(P,Q)$ est réel.
- $\varphi(P,Q)=\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(a)Q^{(i)}(a)=\sum_{i=0}^{n} Q^{(i)}(a)P^{(i)}(a)$. Ainsi, on a : $\varphi(P,Q)=\varphi(Q,P)$.
- $\varphi(\lambda P_1+P_2,Q)=\sum_{i=0}^{n}(\lambda P_1+P_2)^{(i)}(a)Q^{(i)}(a)=\sum_{i=0}^{n}\left(\lambda P_1^{(i)}a+P_2^{(i)}(a)\right)Q^{(i)}(a)$, grâce à la linéarité de la dérivation.

On en déduit : $\varphi(\lambda P_1+P_2,Q)=\lambda\sum_{i=0}^{n}P_1^{(i)}(a)Q^{(i)}(a)+\sum_{i=0}^{n}P_2^{(i)}(a)Q^{(i)}(a)$

Finalement, on a : $\varphi(\lambda P_1+P_2,Q)=\lambda\varphi(P_1,Q)+\varphi(P_2,Q)$.

- $\varphi(P,P)=\sum_{i=0}^{n}\left(P^{(i)}(a)\right)^2 \geq 0$, en tant que somme de carrés.
- Si $\varphi(P,P)=0$, alors $\sum_{i=0}^{n}\left(P^{(i)}(a)\right)^2=0$.

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls. On obtient : $\forall i\in[\![0,n]\!],\ P^{(i)}(a)=0$. On en déduit que a est racine multiple de P avec un ordre au moins égal à $n+1$ donc d'après la question **1.a)**, P est nul. Ainsi : $\varphi(P,P)=0 \Rightarrow P=0$.
On en conclut que φ est un produit scalaire sur E.

2. a) Pour tout couple (i,j) de $[\![0,n]\!]^2$, on a : $\langle P_i,P_j\rangle=\sum_{k=0}^{n}P_i^{(k)}(a)P_j^{(k)}(a)$.

On sait que : $\forall k\in[\![0,i]\!],\ P_i^{(k)}=\dfrac{i!}{(i-k)!}(X-a)^{i-k}$ et $\forall k>i,\ P_i^{(k)}=0$.

On en déduit que pour tout k de $[\![0,n]\!]$: $P_i^{(k)}(a)=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq i\\ i! \text{ si } k=i\end{cases}$

De même, pour tout k de $[\![0,n]\!]$, on a : $P_j^{(k)}(a)=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq j\\ j! \text{ si } k=j\end{cases}$.

Par conséquent, pour tout i différent de j, on a : $P_i^{(k)}(a)P_j^{(k)}(a)=0$

Finalement, pour tout couple (i,j) de $[\![0,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$, on a : $\langle P_i,P_j\rangle=\sum_{k=0}^{n}0=0$.

La famille $(P_0,\dots,P_n)$ est constituée de $n+1$ polynômes non nuls de E, qui est de dimension $n+1$. Ainsi, grâce au **théorème 5.1**, la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est une base orthogonale de E.

⇨ *Méthode 5.1*

b) Pour tout entier naturel i, on a : $\|P_i\|^2=\sum_{k=0}^{n}\left(P_i^{(k)}(a)\right)^2$.

D'après la question **2.a)**, seul le terme d'indice $k=i$ n'est pas nul dans cette somme, et ce terme vaut $(i!)^2$. Pour tout i de $[\![0,n]\!]$, on a donc $\|P_i\|^2=(i!)^2$, d'où : $\|P_i\|=i!$.

On pose alors : $Q_i=\dfrac{1}{i!}(X-a)^i$ et on a $\|Q_i\|=1$. Comme la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est une base orthogonale de E, la famille $\mathcal{B}=(Q_0,\dots,Q_n)$, ainsi construite, est une base orthonormale de E.

3. Pour tout i de $[\![0,n]\!]$, la $i^{\text{ème}}$ coordonnée d'un élément P de E dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est $\langle P,Q_i\rangle$. Or $Q_i^{(k)}(a)=\dfrac{1}{i!}P_i^{(k)}(a)=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq i\\ 1 \text{ si } k=i\end{cases}$ donc : $\langle P,Q_i\rangle=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(a)Q_i^{(k)}(a)=P^{(i)}(a)$.

2) Non corrigé ici.
3)

Si X et Y sont deux variables aléatoires continues indépendantes de densités respectives f et g, la cumulative H de $X+Y$ est donnée par :

$$H(z) = P(X+Y \leq z) = \iint_{x+y\leq z} f(x)g(y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f(x)g(y)dxdy$$

$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{z-y} f(x)dx)dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(z-y)g(y)dy$ où F est la cumulative de X.

Pour obtenir la densité de $X+Y$, on dérive sa cumulative $H(z)$. En dérivant sous l'intégrale, on obtient

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)dy$$

On définit $(f*g)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(z-x)f(x)dx$

Si X et Y sont deux variables indépendantes, la densité de $Z = X + Y$ est donnée par $f * g$.

Si X et Y suivent des lois exponentielles indépendantes de même moyenne $\frac{1}{\lambda}$, on cherche la densité de $X+Y$.

Si $z < 0$, $(f*g)(z) = 0$

Si $z > 0$, $(f*g)(z) = \int_0^{\infty} f(z-y)g(y)dy = \int_0^{z} \lambda e^{-\lambda(z-y)}\, e^{-\lambda y} dy = \lambda^2 z e^{-2z}$

Kholle B :
1)

- $f(P,Q)$ est réel.
- $f(P,Q)=P(-1)Q(-1)+P(0)+Q(0)+P(1)Q(1)=Q(-1)P(-1)+Q(0)P(0)+Q(1)P(1)$
$=f(Q,P)$.
- $f(\lambda P+R,Q)=(\lambda P+R)(-1)Q(-1)+(\lambda P+R)(0)Q(0)+(\lambda P+R)(1)Q(1)$
$=(\lambda P(-1)+R(-1))Q(-1)+(\lambda P(0)+R(0))Q(0)+(\lambda P(1)+R(1))Q(1)$

On en déduit : $f(\lambda P+R,Q)=\lambda(P(-1)Q(-1)+P(0)Q(0)+P(1)Q(1))$
$+(R(-1)Q(-1)+R(0)Q(0)+R(1)Q(1))$.

Finalement, on a : $f(\lambda P+R,Q)=\lambda f(P,Q)+f(R,Q)$.

- $f(P,P)=(P(-1))^2+(P(0))^2+(P(1))^2\geq 0$ en tant que somme de carrés.
- Si $f(P,P)=0$ alors $(P(-1))^2+(P(0))^2+(P(1))^2=0$. Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, tous les termes de la somme sont nuls. On obtient : $P(-1)=P(0)=P(1)=0$. Le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, qui possède au moins trois racines distinctes, est donc nécessairement le polynôme nul. Ainsi, on a montré que : $f(P,P)=0 \Rightarrow P=0$.

En conclusion, l'application f définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2. a) Expliquons, par exemple, le calcul de $a_{1,2}=\langle X,X^2\rangle$. On pose $P=X$ et $Q=X^2$.
On a : $P(-1)=-1$, $Q(-1)=1$, $P(0)=0$, $Q(0)=0$, $P(1)=1$, $Q(1)=1$.
Ainsi : $a_{1,2}=\langle X,X^2\rangle=-1\times1+0\times0+1\times1=0$. En procédant ainsi, on trouve :
$a_{0,0}=\langle 1,1\rangle=3$, $a_{1,1}=\langle X,X\rangle=2$, $a_{2,2}=\langle X^2,X^2\rangle=2$.
$a_{0,1}=a_{1,0}=\langle 1,X\rangle=0$, $a_{0,2}=a_{2,0}=\langle 1,X^2\rangle=2$, $a_{1,2}=a_{2,1}=\langle X,X^2\rangle=0$.

b) Compte tenu des résultats précédents, on a :
- $\langle 1,X\rangle=a_{0,1}=0$
- $\left\langle 1,X^2-\frac{2}{3}\right\rangle=\langle 1,X^2\rangle-\frac{2}{3}\langle 1,1\rangle=a_{0,2}-\frac{2}{3}a_{0,0}=2-\frac{2}{3}\times3=0$.
- $\left\langle X,X^2-\frac{2}{3}\right\rangle=\langle X,X^2\rangle-\frac{2}{3}\langle X,1\rangle=a_{1,2}-\frac{2}{3}a_{1,0}=0$.

Ainsi, la famille $\left(1,X,X^2-\frac{2}{3}\right)$ est orthogonale.

3. Les sous-espaces F et G sont orthogonaux si : $\langle 1+X,X-X^2\rangle=0$ et $\langle 1-X^2,X-X^2\rangle=0$.
- $\langle 1+X,X-X^2\rangle=a_{0,1}-a_{0,2}+a_{1,1}-a_{1,2}=0-2+2-0=0$.
- $\langle 1-X^2,X-X^2\rangle=a_{0,1}-a_{0,2}-a_{2,1}+a_{2,2}=0-2-0+2=0$.

Ainsi, les sous-espaces vectoriels F et G sont donc orthogonaux.

2)

Exercice 13.4

1. a) Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a : $X_i(\Omega)=\mathbb{N}^*$. On en déduit alors : $S_n(\Omega)=[\![n,+\infty[\![$.

Posons pour tout entier naturel n non nul $R(n)$: " $\forall k\geq n, P(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$ ".

La propriété $R(1)$ est vraie.

En effet, on a : $S_1=X_1$ et, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $P(X_1=k)=p(1-p)^{k-1}=\binom{k-1}{0}p^1(1-p)^{k-1}$.

Soit n un entier naturel non nul tel que $R(n)$ est vraie.

Pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :

$$P(S_{n+1}=k)=P(S_n+X_{n+1}=k)=\sum_{\substack{j\in S_n(\Omega)\\ k-j\in X_{n+1}(\Omega)}} P\big((S_n=j)\cap(X_{n+1}=k-j)\big).$$

On a : $\begin{cases} j\in S_n(\Omega)\\ k-j\in X_{n+1}(\Omega)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j\geq n\\ j\leq k-1\end{cases}$.

On obtient : $P(S_{n+1}=k)=\displaystyle\sum_{j=n}^{k-1}P\big((S_n=j)\cap(X_{n+1}=k-j)\big)$.

Comme X_{n+1} est indépendante de $X_1,X_2,\dots,X_n$, alors X_{n+1} et S_n sont indépendantes, on obtient alors :

$$P(S_{n+1}=k)=\sum_{j=n}^{k-1}P(S_n=j)P(X_{n+1}=k-j)=\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}p^n(1-p)^{j-n}(1-p)^{k-j-1}p$$

$$P(S_{n+1}=k)=\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}p^{n+1}(1-p)^{k-n-1}=p^{n+1}(1-p)^{k-n-1}\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}.$$

Grâce à la formule admise, on a : $\displaystyle\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}=\sum_{j=n-1}^{k-2}\binom{j}{n-1}=\binom{k-1}{n}$.

On en conclut : $P(S_{n+1}=k)=\binom{k-1}{n}p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}$. La propriété $R(n+1)$ est donc vraie.

Finalement, par récurrence, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\forall k\geq n, P(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}.$$

b) Toutes les variables X_i possèdent une espérance, on en déduit, par linéarité de l'espérance que S_n possède une espérance et que : $E(S_n)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{n}{p}$.

Les variables X_i sont deux à deux indépendantes et possèdent une variance, on a donc :
$V(S_n)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-p}{p^2}=\frac{n(1-p)}{p^2}$.

c) Comme le support de la variable S_n est $[\![n,+\infty[\![$, on en déduit d'après la définition d'une loi de probabilité : $\sum_{k=n}^{+\infty}P(S_n=k)=1$.

d) Les résultats des questions **1.a)** et **1.c)** nous donnent : $\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}=1$.

On en déduit : $\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(1-p)^k=\frac{(1-p)^n}{p^n}$. Ce résultat est valable pour tout p de $]0,1[$.

Pour tout x de $]0,1[$, $p=1-x$ est un élément de $]0,1[$, on a alors : $\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}x^k=\frac{x^n}{(1-x)^n}$.

En écrivant cette relation en remplaçant n par $n+1$, on obtient : $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\binom{k-1}{n}x^k=\frac{x^{n+1}}{(1-x)^{n+1}}$.

Le changement d'indice $i=k-1$ donne alors : $\sum_{i=n}^{+\infty}\binom{i}{n}x^{i+1}=\frac{x^{n+1}}{(1-x)^{n+1}}$. En simplifiant par x^n et en écrivant $\binom{i}{n}=\frac{i(i-1)...(i-n+1)}{n!}$, on retrouve la formule admise à l'**exercice 11.1** :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,1[,\ \sum_{i=n}^{+\infty}i(i-1)...(i-n+1)x^{i-n}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

2. a) La variable S_n représente le temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ succès.

b) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à n, l'événement $(S_n=k)$ est réalisé si et seulement si on a effectué k épreuves pour enfin obtenir le $n^{\text{ème}}$ succès.
Cela signifie donc qu'après $(k-1)$ épreuves, on avait $(n-1)$ succès et qu'à la $k^{\text{ème}}$ épreuve, on a obtenu le $n^{\text{ème}}$ succès. On a alors : $(S_n=k)=(N_{k-1}=n-1)\cap A_n$, où A_n désigne l'événement « obtenir un succès à la $n^{\text{ème}}$ épreuve ».

c) D'après la question **2.b)**, on a : $\forall k\geq n,\ P(S_n=k)=P((N_{k-1}=n-1)\cap A_n)$.
Les épreuves sont indépendantes, on obtient alors : $P(S_n=k)=P(N_{k-1}=n-1)P(A_n)$.
Par définition la variable N_{k-1} suit la loi binomiale de paramètres $k-1$ et p (nombre de succès lors de $k-1$ épreuves indépendantes). On en déduit : $P(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}p^{n-1}(1-p)^{(k-1)-(n-1)}p$.
Finalement, on a bien : $\forall k\geq n,\ P(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$.