Correction 20/09/2021 :

Kholle A :

On cherche le rang de $\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$

On remarque $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

donc $\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$

et $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$ est libre donc est de dimension 2

donc rg $A = 2$.

1)

Condition nécessaire. On a $f(E) \subset E$ donc $f^2(E) = f[f(E)] \subset f(E)$, c'est-à-dire $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. Montrons maintenant $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$. Soit $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$. Il existe $(x_1, x_2) \in \operatorname{Im} f \times \operatorname{Ker} f$ tel que $x = x_1 + x_2$, donc $y = f(x) = f(x_1) \in \operatorname{Im} f^2$.
Condition suffisante. Soit $x \in E$. On a $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ donc il existe $x' \in E$ tel que $f(x) = f^2(x')$. Donc $f[x - f(x')] = 0$, d'où $y = x - f(x') \in \operatorname{Ker} f$. Si $z = f(x') \in \operatorname{Im} f$, on a donc $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Im} f$. Autrement dit, on vient de montrer $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$. Comme de plus $\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim E$, on en déduit $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$

En dimension infinie, ce résultat est faux. Par exemple, si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ est définie par $f(P) = P'$, on a $\operatorname{Im} f^2 = \mathbb{R}[X] = \operatorname{Im} f$ et pourtant $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ ne sont pas en somme directe ($\operatorname{Im} f = \mathbb{R}[X]$ et $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$).

2) La première question est sans difficulté. Pour la deuxième, on rappelle que l'orthogonal de F est l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur F.

Solution. Condition nécessaire. Supposons $\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_p\varphi_p = 0 \quad (*)$ avec les $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Comme φ est surjective, si on fixe i, $1 \leq i \leq p$, il existe $x \in E$ tel que $\varphi_i(x) = 1$ et pour tout $j \neq i$, $\varphi_j(x) = 0$. Appliqué à $(*)$, ceci entraîne $\lambda_i = 0$, et ceci pour tout i, d'où la condition nécessaire.
Condition suffisante. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$, $(e_1^*, \ldots, e_p^*)$ sa base duale. Soit $\psi \in (\operatorname{Im}\varphi)^\perp$. Écrivons $\psi = \lambda_1 e_1^* + \cdots + \lambda_p e_p^*$. Pour tout $x \in E$, $\psi(\varphi(x)) = 0 = \lambda_1\varphi_1(x) + \cdots + \lambda_p\varphi_p(x)$, donc $\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_p\varphi_p = 0$, ce qui entraîne $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, donc $\psi = 0$. Autrement dit, on a montré $(\operatorname{Im}\varphi)^\perp = \{0\}$, donc $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{K}^p$, c'est-à-dire que φ est surjective.

Pour la fin : soit F un sev de E un ev, si on suppose que l'orthogonal de F est réduit à 0, montrons par l'absurde que F=E. Si on suppose que F n'est pas E alors F est inclus strictement dans E et donc on peut facilement construire une application linéaire qui s'annule sur F mais pas sur E (on complète une base de F en une base de E, puis on regarde les images de la base). Ceci contredit le fait que l'orthogonal de F est réduit à 0.

3) Il suffit de remarque de {1, X , …, X^n} est une base constituée de vecteurs propres.

BONUS :

Nous allons montrer le résultat suivant. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ commute avec tous les éléments de $\mathcal{G}\ell(E)$, alors f est une homothétie. En particulier, le centre de $\mathcal{G}\ell(E)$ est $\{\lambda \,\mathrm{Id}_E \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall g \in \mathcal{G}\ell(E)$, $gf = fg$. Supposons que f ne soit pas une homothétie. il existe $u \in E$, $u \neq 0$, tel que la famille $(u, f(u))$ forme une famille libre. Complétons là en une base $(u, f(u), e_3, \ldots, e_n)$ de E. Définissons $g \in \mathcal{L}(E)$ sur cette base comme suit

$$g(u) = u, \quad g(f(u)) = u + f(u), \quad \forall i \geq 3,\ g(e_i) = e_i.$$

On a $g \in \mathcal{G}\ell(E)$ car g transforme une base de E en une base de E. Or $g \circ f(u) = u + f(u)$ et $f \circ g(u) = f(u)$, donc $f \circ g \neq g \circ f$ car $u \neq 0$. Finalement, f est une homothétie.

Kholle B :

1) a) $\mathcal{B}$ est génératrice de E par définition

et $\mathcal{B}$ est libre car : Si il existe $a,b,c \in \mathbb{R}$ tq

$a f_1 + b f_2 + c f_3 = 0$ càd $a f_1(x) + b f_2(x) + c f_3(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad a + b e^{x} + c e^{-x} = 0$ (et donc $a e^{-x} + b + c e^{-2x} = 0$)

en regardant $\to +\infty$: $b = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, a + c e^{-x} = 0$

donc ($\to +\infty$), $a = 0$ donc $c = 0$ / en $x = 1$ (par exemple) $c e^{-1} = 0$ donc $c = 0$)

b) Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

$d(\lambda f + \beta g) = (\lambda f + \beta g)' = \lambda f' + \beta g'$ car la dérivation respecte cette règle.

$= \lambda d(f) + \beta d(g)$

donc d linéaire.

De plus $f_1'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f_2'(x) = e^{x} = f_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

et $f_3'(x) = -e^{-x} = -f_3(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc si $f \in E$: $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$ tq $f = a f_1 + b f_2 + c f_3$

et donc $f' = b f_2 - c f_3 \in E$

D'où $\mathrm{Im}(d) \subset E$.

f est bien un endomorphisme de E.

c) $\mathrm{Mat}_B(d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (d non bijective)

2) cf cours.

3) a) $tr : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ donc $Im(tr) \subset \mathbb{R}$.

Soit $M = (m_{ij})_{ij}$ et $N = (n_{ij})_{ij}$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

alors $tr(\lambda M + \beta N) = tr\left((\lambda m_{ij} + \beta n_{ij})_{ij} \right)$

$= \sum_{k=1}^{n} \lambda m_{kk} + \beta n_{kk} = \lambda \sum_{k=1}^{n} m_{kk} + \beta \sum_{k=1}^{n} n_{kk}$

$= \lambda\, tr(M) + \beta\, tr(N)$.

Ainsi tr est une forme linéaire.

$Im(tr)$ est un sev de $\mathbb{R}$ et comme $tr(I) = n \neq 0$

alors $Im(tr) \neq \{0\}$ et donc $\dim(Im(tr)) \in \{0;1\}$ mais est $\neq 0$

donc $\dim(Im(tr)) = 1$

et $Im(tr) = \mathbb{R}$.

b) Th du rg : $\dim(Ker(tr)) = \dim(M_n(\mathbb{R})) - rg(tr)$

$= n^2 - 1$.

c) On a $\dim(M_n(\mathbb{R})) = \dim(Ker(tr)) + \underbrace{\dim(Vect(I))}_{=1}$

De plus, $Ker(tr) \cap Vect(I) = \{0\}$

car Si $M \in Ker(tr) \cap Vect(I)$ alors $M = kI$ et $tr(M) = 0$

Or $tr(M) = kn = 0$ donne $k = 0$ et $M = 0_n$

Donc $M_n(\mathbb{R}) = Ker(tr) \oplus Vect(I)$

c) $f(1,0,0) = (1,3,9)$
$f(0,1,0) = (0,-2,-9)$
$f(0,0,1) = (0,1,4)$

ainsi $Mat_B f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 9 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\{u,v,w\} = C$ est libre car

Si $au + bv + cw = (0,0,0)$ alors $\begin{cases} a+b=0 \\ a+2b+c=0 \\ a+3b+3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ 2b+3c=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$

et $Card(C) = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc C base de $\mathbb{R}^3$

e) La matrice de passage de B à C est la matrice de l'identité dans les bases C et B

Or $Id(u) = u = e_1 + e_2 + e_3$
$v = e_1 + 2e_2 + 3e_3$
$w = e_2 + 3e_3$

$Mat_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

P ou toute autre notation que vous utilisez

f) $Mat_C^B = (Mat_B^C)^{-1}$.

On résout donc $\begin{cases} x+y=a \\ x+2y+z=b \\ x+3y+3z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ y+z=b-a \\ 2y+3z=c-a \end{cases}$

4) $H = \mathrm{Ker}(\phi)$ où $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \dots + x_n \end{array}$ est linéaire

Donc H est le noyau d'une forme linéaire (non nulle car $\phi(1,1,\dots,1) = n$)

et donc $\dim(H) = n - 1$.

De plus, $\dim(\mathrm{Vect}(1,1,\dots,1)) = 1$

$\Big\}$ donc $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(H) + \dim(\mathrm{Vect}(1,1,\dots,1))$

Or $H \cap \mathrm{Vect}(1,\dots,1) = \{0_n\}$ car si $X = (x_1, \dots, x_n) \in H \cap \mathrm{Vect}(1,\dots,1)$

alors $X = (k, \dots, k)$ et $\underbrace{k + \dots + k}_{= nk} = 0$ donc $k = 0$.

Donc $X = (0, \dots, 0) = \{0_n\}$.

D'où $\mathbb{R}^n = H \oplus \mathrm{Vect}(1, \dots, 1)$.

Kholle C :

a) Si $\nexists e_1$ tq $e_1 \notin \mathrm{Ker}(f_1)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ donc $f^2(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$ donc $f^2 = 0$ ↯ absurde

b) Montrons qu'elle est libre :

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $a e_1 + b f(e_1) + c f^2(e_1) = 0$

alors $a f(e_1) + b f^2(e_1) + c \underbrace{f^3(e_1)}_{=0} = f(0) = 0$

et $a f^2(e_1) + b \underbrace{f^3(e_1)}_{=0} = f(0) = 0$

Or $f^2(e_1) \neq 0$ donc $a = 0$, donc $b = 0$ et donc $c = 0$.

La famille est libre et de cardinal $3 = \dim \mathbb{R}^3$

C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$

1)

Solution. **a)** Soit $y \in E$. Comme $(f(x_0), \ldots, f^n(x_0))$ est une base de E, il existe $(\lambda_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n$ tels que $y = \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_n f^n(x_0)$, donc $y = f[\lambda_1 x_0 + \lambda_2 f(x_0) + \cdots + \lambda_n f^{n-1}(x_0)] \in \mathrm{Im}\, f$, et ceci pour tout $y \in E$. L'application f est donc surjective, donc bijective car c'est un endomorphisme en dimension finie.

b) Comme B forme une base de E, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $f^{n+1}(x_0) = \lambda_n f^n(x_0) + \cdots + \lambda_1 f(x_0)$. Posons $g = f^{n+1} - \lambda_n f^n - \cdots - \lambda_1 f$. On a $g(x_0) = 0$. Or

$$\forall i, 1 \le i \le n, \quad g[f^i(x_0)] = f^{n+i+1}(x_0) - \lambda_n f^{n+i}(x_0) - \cdots - \lambda_1 f^{i+1}(x_0) = f^i[g(x_0)] = 0,$$

autrement dit g s'annule sur la base B, donc $g = 0$. En composant g à gauche par f^{-1}, on obtient $f^n - \lambda_n f^{n-1} - \cdots - \lambda_1 \mathrm{Id}_E = 0$.

2)

On note $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \le n\}$. Soit l'endomorphisme $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ $P(X) \mapsto P(X+1)$. La famille $B = (1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et on voit facilement que M est la matrice de f dans la base B. Or f est inversible, son inverse étant $g : P(X) \mapsto P(X-1)$. Donc M est inversible, et

$$M^{-1} = [f^{-1}]_B = [g]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & C_1^1 & -C_2^1 & \cdots & (-1)^{n-1} C_n^1 \\ \vdots & \ddots & C_2^2 & \cdots & (-1)^{n-2} C_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_n^n \end{pmatrix}.$$

3)

Solution. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a $f^2 = 0$, donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Soit $r = \operatorname{rg} f$. Si $r = 0$, on a $f = 0$. Sinon $r \geq 1$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\operatorname{Im} f$. Comme $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, on peut compléter cette base en une base $(e_1, \dots, e_{n-r})$ de $\operatorname{Ker} f$ (au passage, on remarque que $r \leq n - r$ donc $r \leq n/2$). Pour $1 \leq i \leq r$, $e_i \in \operatorname{Im} f$ donc il existe $u_i \in \mathbb{K}^n$ tel que $f(u_i) = e_i$.

Montrons que $B = (e_1, \dots, e_{n-r}, u_1, \dots, u_r)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Il suffit de montrer que c'est une famille libre (il y a n éléments). Supposons $(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{n-r} e_{n-r}) + (\mu_1 u_1 + \cdots + \mu_r e_r) = 0$ où les $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{K}$. En composant par f, on trouve $\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_r e_r = 0$, donc $\forall i, \mu_i = 0$. Donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{n-r} e_{n-r} = 0$, et donc $\forall i, \lambda_i = 0$. B est donc bien une base de $\mathbb{K}^n$. Dans cette base, f a pour matrice $M_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $r \leq n/2$, et A est donc semblable à M.

Réciproquement, si $A = 0$ ou si A est semblable à M_r avec $r \leq n/2$, alors $A^2 = 0$. Les matrices recherchées sont donc celles semblables à M_r avec $r \leq n/2$ et la matrice nulle.