(a) La probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de k lancers est $(5/6)^k$. Il s'agit donc ici de trouver le plus petit k pour lequel $(5/6)^k \leq 1/2$. On obtient $k = 4$.

(b) On veut $(35/36)^k < 1/2$ et on obtient $k = 25$.

Notons A_i l'événement « une boule blanche est obtenue lors du i-ème tirage ». Les événements A_i sont mutuellement indépendants et $\mathrm{P}(A_i) = p$ pour tout i.

(a) Notons B_n l'événement « la première boule blanche apparaît lors du n-ième tirage ».
On peut écrire

$$B_n = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n.$$

Par indépendance, on obtient

$$\mathrm{P}(B_n) = (1-p)^{n-1}p.$$

(b) Notons C_{n-1} l'événement « $k-1$ boules sont apparues lors des $n-1$ premiers tirages »
et D_n l'événement « la k-ième boule blanche tirée apparaît lors du n-ième tirage ».
On a $D_n = C_{n-1} \cap A_n$ et

$$\mathrm{P}(C_{n-1}) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

car il s'agit de la probabilité d'obtenir $k-1$ succès dans la répétition indépendante d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
Par indépendance, on conclut

$$\mathrm{P}(D_n) = \mathrm{P}(C_{n-1} \cap A_n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(a) Pour chaque tirage faisant apparaître les nombres a, b, c dans le bon ordre, il y en a 5 autres où ces mêmes nombres apparaissent dans le désordre. La probabilité recherchée est donc égale à $1/6$.

(b) Un tirage s'apparente à une fonction de $[\![1\,;3]\!]$ vers $[\![1\,;10]\!]$. Il y a 10^3 fonctions toutes équiprobables. Parmi celles-ci, on recherche les fonctions strictement croissantes. Celles-ci sont simplement déterminées par les 3 valeurs distinctes qu'elles prennent qu'il suffit ensuite d'ordonner. Déterminer ces trois valeurs revient à choisir 3 éléments dans un ensemble à 10 éléments, il y a $\binom{10}{3}$ possibilités. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{10}{3}}{10^3} = \frac{12}{100}.$$

(c) Il s'agit maintenant de dénombrer les fonctions croissantes de $[\![1\,;3]\!]$ vers $[\![1\,;10]\!]$. À une telle fonction f, on peut associer la fonction $g\colon [\![1\,;3]\!] \to [\![1\,;12]\!]$ déterminée par

$$g(1) = f(1), g(2) = f(2) + 1 \text{ et } g(3) = f(3) + 2.$$

La fonction f étant croissante, la fonction g est strictement croissante. Inversement, à une fonction g strictement croissante de $[\![1\,;3]\!]$ vers $[\![1\,;12]\!]$ correspond une unique fonction f croissante de $[\![1\,;3]\!]$ vers $[\![1\,;10]\!]$. Il y a donc autant de fonctions croissantes de $[\![1\,;3]\!]$ vers $[\![1\,;10]\!]$ que de fonctions strictement croissantes de $[\![1\,;3]\!]$ vers $[\![1\,;12]\!]$ à savoir $\binom{12}{3}$. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{12}{3}}{10^3} = \frac{22}{100}.$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons que toute partie d'un ensemble à n éléments est finie.
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.
Soit E un ensemble fini a $n+1$ éléments.

$$E = \{x_1,\ldots,x_n, x_{n+1}\}$$

avec des x_i deux à deux distincts.
Posons

$$E' = \{x_1,\ldots,x_n\}$$

On a $\text{Card } E' = n$.
Soit A une partie de E.
Si $x_{n+1} \notin A$ alors A est une partie de E' et elle donc finie par hypothèse de récurrence.
Si $x_{n+1} \in A$. Posons $A' = A \setminus \{x_{n+1}\}$. A' est une partie de E' et donc, par hypothèse de récurrence, A' est finie. Puisque $A = A' \cup \{x_{n+1}\}$, l'ensemble A est réunion de deux ensembles finis disjoints et c'est donc une partie finie.
Récurrence établie

E est la réunion des deux parties A et $C_E A$ qui sont disjointes et finies.
On en déduit

$$\text{Card } A + \text{Card } C_E A = \text{Card } E$$

Puisque $\text{Card } C_E A \geq 0$, on obtient $\text{Card } A \leq \text{Card } E$ avec égalité si, et seulement si, $\text{Card } C_E A = 0$ i.e. $C_E A = \emptyset$ ce qui correspond au cas où $A = E$.

Posons $n = \text{Card } E$.
Si $n = 0$ alors $E = \emptyset$ et $f(E) = \emptyset$: ok
Si $n \neq 0$, écrivons $E = \{x_1,\ldots,x_n\}$ avec des x_i deux à deux distincts.
On a $f(E) = \{f(x_1),\ldots,f(x_n)\}$ et donc $f(E)$ est un ensemble fini avec $\text{Card } f(E) \leq n$.
Si de plus f est injective, les $f(x_i)$ sont deux à deux distincts et donc $\text{Card } f(E) = n$.

Supposons qu'il existe une injection f de E dans F. L'ensemble $f(E)$ est une partie de F donc

$$\operatorname{Card} f(E) \leq \operatorname{Card} F$$

Or f est injective donc

$$\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} E$$

et donc

$$\operatorname{Card} E \leq \operatorname{Card} F$$

Supposons maintenant qu'il existe une surjection f de E dans F. L'ensemble $f(E)$ n'est alors autre que F et la propriété

$$\operatorname{Card} f(E) \leq \operatorname{Card} E$$

donne directement

$$\operatorname{Card} F \leq \operatorname{Card} E$$

Enfin, s'il existe une bijection f de E vers F, c'est une injection et une surjection !

(i) $\Rightarrow$ (ii) est entendue.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons $f : E \to F$ injective.
On a $f(E) \subset F$ et $\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ donc $f(E) = F$.
Par suite, l'application f est surjective.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Supposons $f : E \to F$ surjective.
Par l'absurde, si f n'est pas injective alors il existe $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$.
On a alors $f(E \setminus \{x\}) = f(E) = F$ car f est surjective et $f(x') = f(x)$.
Or $\operatorname{Card} f(E \setminus \{x\}) < \operatorname{Card} E$ d'où $\operatorname{Card} F < \operatorname{Card} E$. C'est absurde.

Par récurrence sur $p \geq 0$.
Cas $p = 0$: il existe un arrangement de 0 élément de E correspondant à l'arrangement vide...
Cas $p = 1$: un arrangement d'un élément de E correspond au choix de cet élément et la propriété est immédiate. Supposons la propriété vraie au rang $p \geq 0$.
Notons $A_{p+1}(E)$ l'ensemble des arrangements de $p+1$ éléments de E.
Soit x un élément de E et notons $A_{p+1}^{x}(E)$ l'ensemble des arrangements $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1})$ d'éléments de E se terminant par x i.e. tels que $x_{p+1} = x$.
Considérons enfin la fonction f qui associe à celui-ci l'arrangement réduit $(x_1, \ldots, x_p)$.
L'application f réalise une bijection de $A_{p+1}^{x}(E)$ vers $A_p(E \backslash \{x\})$ ensemble des arrangements de p éléments de $E \backslash \{x\}$. Par hypothèse de récurrence, on peut donc affirmer qu'il y a exactement

$$(n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

arrangements de $p+1$ éléments de E se terminant par x.
Puisque l'ensemble des arrangements $p+1$ éléments de E est la réunion disjointe des ensembles $A_{p+1}^{x}(E)$ pour x parcourant E, on obtient

$$\operatorname{Card} A_{p+1}(E) = \sum_{x \in E} \operatorname{Card} A_{p+1}^{x}(E) = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Récurrence établie.

Cas $p = 0$: l'ensemble E est vide et alors il n'y a qu'une seule application au départ de E (qu'on appelle l'application vide...) et celle-ci est injective. La propriété énoncée est alors vraie.
Cas $p \neq 0$: on peut écrire $E = \{x_1, \ldots, x_p\}$ avec les x_i deux à deux distincts.
Considérons alors l'application qui à une injection f de E dans F associe l'échantillon $(f(x_1), \ldots, f(x_p))$. Cette application réalise une bijection de l'ensemble des injections de E dans F vers l'ensemble des arrangements de p éléments de F.

Notons $A_p(E)$ l'ensemble des arrangements de p éléments de E et $C_p(E)$ l'ensemble des combinaisons de p éléments de E. On peut définir une application $f : A_p(E) \to C_p(E)$ en associant à chaque arrangement $(x_1, \ldots, x_p)$ la combinaison $\{x_1, \ldots, x_p\}$. Pour une combinaison $\{x_1, \ldots, x_p\}$ donnée, les arrangements qui lui correspondent par f sont obtenus à partir de $(x_1, \ldots, x_p)$ et de ses permutations. Il y a donc exactement $p!$ arrangements associés à la combinaison $\{x_1, \ldots, x_p\}$. Puisque $A_p(E)$ est la réunion disjointe des ensembles des arrangements ainsi déterminés, on obtient

$$\operatorname{Card} A_p(E) = \operatorname{Card} C_p(E) \times p!$$

puis

$$\operatorname{Card} C_p(E) = \frac{1}{p!} \frac{n!}{(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

Notons E l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ et E_n l'ensemble des parties finies de $[\![0\,;n]\!]$. Puisque toute partie finie de $\mathbb{N}$ est nécessairement majorée, on peut affirmer l'égalité

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

Les ensembles E_n étant finis et la réunion dénombrable, on peut affirmer que E est dénombrable en tant qu'ensemble infini réunion dénombrable de parties au plus dénombrables. On peut aussi propose un dénombrement expliciter. Si l'on note $i_1, \ldots, i_k$ les éléments d'une partie A finie de $\mathbb{N}$, on peut lui associer l'entier

$$n(A) = 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_k}.$$

L'existence et l'unicité de la décomposition d'un entier en somme de puissances de 2 assurant la bijectivité de cette association.

On a l'encadrement

$$\frac{1}{(p+q)^2} \leq \frac{1}{p^2+q^2} \leq \frac{2}{(p+q)^2}$$

La sommabilité de la famille étudiée équivaut à celle de

$$\left(\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$$

En regroupant par paquets selon

$$I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid p+q = n\}$$

celle-ci équivaut à la sommabilité de

$$\left(\frac{n-1}{n^{2\alpha}}\right)_{n\geq 2}$$

qui est vraie si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Puisque $|z| < 1$, on peut écrire par sommation géométrique

$$\frac{1}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Tout entier naturel non nul p s'écrit de façon unique sous la forme

$$p = 2^n(2k+1) \text{ avec } n, k \in \mathbb{N}$$

On peut donc affirmer que $\mathbb{N}^*$ est la réunion des ensembles deux à deux disjoints suivants

$$A_n = \{2^n(2k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Puisque la famille $(z^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est sommable, on peut sommer par paquets et écrire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m \in A_n} z^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z}$$

La série $\sum_{p \geq 1} u_{p,q}$ est absolument convergente et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |u_{p,q}| = \frac{|a|^{2q-1}}{1 - |a|^{2q-1}}$$

De plus la série de terme général $\frac{|a|^{2q-1}}{1-|a|^{2q-1}}$ est absolument convergente en vertu de la règle de d'Alembert.
La famille $(u_{p,q})_{p,q \geq 1}$ est donc sommable et on a

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}$$

ce qui fournit la relation

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{a^{2q-1}}{1 - a^{2q-1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{1 - a^{2p}}$$

D'une part $\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 0$ donc $\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 0$.
D'autre par $\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$ donc $\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = 1$.
La formule de Fubini ne s'applique pas, la famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ n'est donc pas sommable.

Notons que les termes sommés sont positifs.
Pour chaque $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge car $\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \sim \frac{1}{p^2}$.

Par télescopage

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}\right) = \frac{1}{q^2}$$

La série $\sum_{q\geq 1}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q\geq 1}\frac{1}{q^2}$ converge aussi, on peut donc affirmer que la famille

$$\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$$

est sommable et sa somme vaut

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}$$