Soulignons que les termes sommés pour définir la série entière ont un sens car l'irrationalité de α donne
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n\pi\alpha) \neq 0$$

(a) Puisque
$$\frac{1}{|\sin(n\pi\alpha)|} \geq 1$$
la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge grossièrement en 1 et donc $R_\alpha \leq 1$.

(b) Par une récurrence facile, on montre $u_n \geq n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n^{u_n-1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n}$$

(c) On a
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_{k+1}} \leq \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}\frac{1}{u_k}$$
et puisque la suite (u_n) est croissante
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{K}{u_{n+1}}$$
avec
$$K = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}$$
On en déduit
$$\pi u_n \sum^{+\infty} \frac{1}{\quad} \leq \frac{K\pi u_n}{\quad} = \frac{K\pi}{\quad}$$
d'où
$$0 \leq -\sin(m\pi\alpha) \leq \frac{C}{u_n^{u_n-1}}$$
puis
$$-\frac{x^m}{\sin(m\pi\alpha)} \geq C\frac{(xu_n)^{u_n}}{u_n} \to +\infty$$
On en déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge pour tout $x > 0$ et donc $R_\alpha = 0$.

(e) Par l'absurde, supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$. Il existe alors un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q\alpha \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $qu_n\alpha \in \mathbb{N}$ or
$$qu_n\alpha = qu_n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} + qu_n\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$$
avec comme vu ci-dessus
$$u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}$$
On en déduit
$$qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}$$
Or
$$0 < qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} < \frac{qKu_n}{u_{n+1}} \to 0$$
C'est absurde.

(a) $R = 1$.

(b) Pour $x \in]-1\,;1[$, on a

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^{n+1}$$

Après décalage d'indice et réunion des deux sommes

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) x^{n+1}$$

ce qui conduit à la relation demandée.

(c) Posons

$$g_n(x) = (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$$

ce qui définit $g_n \colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue.
À l'aide du critère spécial des séries alternées, on montre que la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ ce qui assure que sa somme est continue. On en déduit par opérations sur les limites

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

(d) En regroupant les termes d'indices impairs et pairs consécutifs

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2n+1}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\right)^2\right)$$

Enfin par la formule du Wallis, on obtient

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}$$

(c) Pour $n \geq 2$, $a_n = \ln n - \ln(n-1) - 1/n$ donc

$$a_n x^n = \ln(n)x^n - \ln(n-1)x^n - \frac{1}{n}x^n$$

En sommant pour n allant de 2 à $+\infty$,

$$g(x) = (1-x)f(x) + \ln(1-x)$$

(d) Puisque $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$, la série $\sum |a_n|$ est convergente et donc la fonction g est définie et continue sur le segment $[-1\,;1]$. Par suite, la fonction g converge en 1^- et puisque le terme $\ln(1-x)$ diverge quand $x \to 1^-$, on obtient

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

(e) Puisque

$$f(x) = \frac{g(x) - \ln(1-x)}{1-x}$$

on obtient quand $x \to -1^+$,

$$f(x) \to \frac{g(-1) - \ln(2)}{2}$$

Il reste à calculer $g(-1)$ ...

$$g(-1) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\ln n - \ln(n-1)\right) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Or

$$1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

et en regroupant les termes pairs et impairs consécutifs

$$\sum_{n=2}^{2N+1} (-1)^n \left(\ln n - \ln(n-1)\right) = \sum_{p=1}^{N} 2\ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) - \ln(2N+1) = \ln \frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N+1)!(2N)!} \to$$

en vertu de la formule de Stirling.
Finalement

$$g(-1) = \ln\frac{\pi}{2} + \ln(2)$$

On en déduit

$$f(x) \xrightarrow[x\to -1^+]{} \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}$$

(a) $u_n(z) = \frac{n^2+1}{3^n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \to \frac{|z|}{3}$ donc $R = 3$.

(b) $u_n(z) = z^n \mathrm{e}^{-n^2}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $n^2 u_n(z) \to 0$ donc $R = +\infty$.

(c) $u_n(z) = \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \frac{n^2}{(n+1)^2} |z|^2 \to |z|^2$ donc $R = 1$.

(d) $u_n(z) = \frac{n^n}{n!} z^{3n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)^n}{n^n} |z|^3 \to \mathrm{e}\,|z|^3$ donc $R = \mathrm{e}^{-1/3}$.

(a) $u_n(z) = n! z^n$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = (n+1)\,|z| \to +\infty$$

donc $R = 0$.

(b) $u_n(z) = \binom{2n}{n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |z| \to 4\,|z|$$

donc $R = 1/4$.

(c) $u_n(z) = \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} |z| \to 27\,|z|$$

donc $R = 1/27$.

(d)

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}} - 1\right)$$

or $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = -\frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2}.$$

Par suite $R = 1$.

(a) Posons

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leq 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geq 1$.
Finalement $R = 1$.

(b) Posons $a_n = \sin n$.
(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leq 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geq 1$.
Finalement $R = 1$.

(c) Posons $a_n = (\sin n)/n^2$.
(a_n) est bornée donc $R \geq 1$.
Pour $|z| > 1$, la suite $\left(\frac{\sin n}{n^2} |z|^n\right)_{n \geq 1}$ ne tend pas vers 0 car la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0. On en déduit $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

(a) La probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de k lancers est $(5/6)^k$. Il s'agit donc ici de trouver le plus petit k pour lequel $(5/6)^k \leq 1/2$. On obtient $k = 4$.

(b) On veut $(35/36)^k < 1/2$ et on obtient $k = 25$.

La modélisation entraîne que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p:

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ avec } k \in [\![0; n]\!].$$

La variable aléatoire Y n'est quant à elle bien connue que lorsque le nombre $n - X$ de cibles restant l'est, elle suit alors une loi de Bernoulli

$$\mathrm{P}(Y = \ell \mid X = k) = \binom{n-k}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-k-\ell} \text{ avec } \ell \leq n-k.$$

Par probabilités totales

$$\mathrm{P}(Z = m) = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{P}(X = k, Y = m-k).$$

Par probabilités composées

$$\mathrm{P}(Z = m) = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{P}(X = k)\mathrm{P}(Y = m-k \mid X = k).$$

Ceci donne

$$\mathrm{P}(Z = m) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} p^m (1-p)^{2n-k-m}.$$

Or

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \frac{n!}{k!\,(m-k)!\,(n-m)!} = \binom{n}{m}\binom{m}{k}$$

et donc

$$\mathrm{P}(Z=m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{2n-m} \times \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\left(\frac{1}{1-p}\right)^k.$$

Par la formule du binôme

$$\mathrm{P}(Z=m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{2n-m} \frac{(2-p)^m}{(1-p)^m} = \binom{n}{m} q^m (1-q)^{n-m}$$

avec $q = p(2-p)$.
La variable Z suit une loi binomiale. donc $\mathbb{E}[Z] = np(2p)$

$\mathbb{V}[Z] = np(2-p)(1-2p+p^2)$

$= np(2-p)(1-p)^2$.

Compte tenu de l'expérience modélisée, on peut affirmer que la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

$$\mathrm{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

De plus, pour $k \in [\![0;n]\!]$, si l'événement $(X=k)$ est réalisé, il y a $n-k$ questions pour lesquelles l'étudiant répond au hasard avec une probabilité $1/4$ de réussir:

$$\mathrm{P}(Y=j \mid X=k) = \binom{n-k}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^j \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k-j} \quad \text{avec } j \in [\![0;n-k]\!].$$

(a) La variable Z prend ses valeurs dans $[\![0;n]\!]$.
Pour $k \in [\![0;n]\!]$, l'événement $(Z=k)$ peut être décomposé en la réunion disjointe des événements

$$(X=j, Y=k-j) \text{ avec } j \in \{0,1,\dots,k\}.$$

Ainsi

$$\mathrm{P}(Z=k) = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{P}(X=j, Y=k-j).$$

Par probabilité composées

$$\mathrm{P}(X=j, Y=k-j) = \mathrm{P}(Y=k-j \mid X=j)\mathrm{P}(X=j).$$

Ainsi

$$\mathrm{P}(Z=k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-j}{k-j}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-j}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}\binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.$$

Or

$$\binom{n-j}{k-j}\binom{n}{j} = \frac{n!}{(k-j)!\,(n-k)!\,j!} = \binom{k}{j}\binom{n}{k}.$$

On en déduit

$$\mathrm{P}(Z=k) = \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{4}(1-p)\right)^{k-j}p^{j}.$$

Par la formule du binôme

$$\mathrm{P}(Z=k) = \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{4}(1-p)+p\right)^{k}.$$

On simplifie

$$\mathrm{P}(Z=k) = \binom{n}{k}q^{k}(1-q)^{n-k} \text{ avec } q = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}p.$$

(b) On a alors

$$\mathrm{E}\,(Z) = \frac{(3p+1)n}{4} \text{ et } \mathrm{V}\,(Z) = \frac{3n(3p+1)(1-p)}{16}.$$