Avec ces notations, $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I(a,b) = \min\limits_{f\in F} \|f - id_E\|^2$, et on sait que ce minimum est atteint lorsque f est le projeté orthogonal de la fonction id_E sur le sous-espace vectoriel F.

$\star$ Pour le calculer, cherchons une base orthonormale de F : la famille $(\sin, \cos)$ est génératrice de F et libre car : $\lambda \sin + \mu \cos = 0 \implies \forall t \in [0, \pi], \lambda \sin(t) + \mu \cos(t) = 0 \implies \lambda = 0$ (pour $t = \frac{\pi}{2}$) et $\mu = 0$ (pour $t = 0$). Ainsi, $(\sin, \cos)$ est une base de F.

— $\langle \sin, \cos \rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(t)\, dt = \left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi} = 0$, donc cette base est orthogonale.

— $\|\sin\|^2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(t)\, dt = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.

— Comme $\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t))\, dt = \pi$, on a aussi $\|\cos\|^2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\left(\dfrac{\sin}{\|\sin\|}, \dfrac{\cos}{\|\cos\|}\right) = \left(\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin, \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos\right)$ est une base orthonormale de F.

$\star$ Alors le projeté orthogonal p de id_E sur F s'écrit :

$$p = \langle id_E, \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin\rangle \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin + \langle id_E, \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\cos\rangle \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\cos = \frac{2}{\pi}[\langle id_E, \sin\rangle \sin + \langle id_E, \cos\rangle \cos]$$

Or :

$$\langle id_E, \sin\rangle = \int_0^{\pi} t\sin(t)\, dt = \big[-t\cos(t)\big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(t)\, dt = \pi + \big[\sin(t)\big]_0^{\pi} = \pi$$

$$\langle id_E, \cos\rangle = \int_0^{\pi} t\cos(t)\, dt = \big[t\sin(t)\big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(t)\, dt = \big[\cos(t)\big]_0^{\pi} = -2$$

(intégrations par parties)

Le projeté orthogonal p est donc $\frac{2}{\pi}[\pi \sin - 2\cos] = 2\sin - \frac{4}{\pi}\cos$. Finalement :

$$\boxed{I(a,b) \text{ est minimal pour } a = 2 \text{ et } b = -\frac{4}{\pi}}$$

Corrigé 22.02

Notons dans les deux cas f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice étudiée.

(A) On a $6^2 + 2^2 + 3^2 = 36 + 4 + 9 = 49 = 7^2$, donc les colonnes de A sont de norme 1 (ne pas oublier le facteur $\frac{1}{7}$). On vérifie facilement qu'elles sont deux à deux orthogonales et A est une matrice orthogonale.

La matrice A est de plus symétrique, donc la relation ${}^tAA = I_3$ donne en fait $A^2 = I_3$ et f est une symétrie orthogonale. Or :

2

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x + 6y - 3z = 7x \\ 6x + 3y + 2z = 7y \\ -3x + 2y + 6z = 7z \end{cases} \iff \begin{cases} -9x + 6y - 3z = 0 \\ 6x - 4y + 2z = 0 \\ -3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff 3x - 2y + z = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est la symétrie orthogonale par rapport au plan } P \text{ d'équation } 3x - 2y + z = 0}$$

(B) $\star$ On a $2^2 + 2^2 + 1^2 = 9 = 3^2$, donc les colonnes de B sont de norme 1 (ne pas oublier le facteur $\frac{1}{3}$!), on vérifie qu'elles sont deux à deux orthogonales et B est une matrice orthogonale.

$\star$ On a $\det(B) = \dfrac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{27}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{27}(36 - 9) = 1$, donc f est une rotation et comme on « voit » que $f(1,1,1) = (1,1,1)$, f est une rotation autour de l'axe Δ dirigé par le vecteur $u = (1,1,1)$.

$\star$ On a $\operatorname{tr}(B) = 2$, or si $\theta \in [0, 2\pi]$ est l'angle de la rotation f, on a $1 + 2\cos\theta = \operatorname{tr}(B) = 2$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

⋆ Le vecteur $e_1 = (1, 0, 0)$ n'est pas colinéaire au vecteur u, et $f(e_1) = \frac{1}{3}(2, 2, -1)$.

Donc $\det(e_1, f(e_1), u) = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$. Donc la base $(e_1, f(e_1), u)$ est directe et $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Par conséquent $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est la rotation d'angle } \tfrac{\pi}{3} \text{ autour de l'axe dirigé par } (1, 1, 1).}$$

Corrigé 22.06

3

1°) Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors ${}^tXX$ est une matrice carrée réelle de taille 1, que l'on confond avec son unique coefficient et ${}^tXX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Ainsi ${}^tXX \geqslant 0$ puisque les x_k sont des réels et ${}^tXX = 0$ implique $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = 0$, *i.e.* $X = 0$.

2°) Soit $X \in \operatorname{Ker}(I_n + M)$. On a donc $(I_n + M)X = 0$, *i.e.* $MX = -X$, et ${}^tXMX = -{}^tXX$.
Mais en transposant cette dernière relation, on obtient :

$${}^t({}^tXMX) = {}^t(-{}^tXX), \text{ soit } {}^tX\,{}^tM\,{}^{tt}X = -{}^tX\,{}^{tt}X$$

et comme ${}^tM = -M$ et ${}^{tt}X = X$, il reste :

$$-{}^tXMX = -{}^tXX$$

et ${}^tXX = -{}^tXX$, soit ${}^tXX = 0$ et $X = 0$. D'où $\operatorname{Ker}(I_n + M) = \{0\}$ et

$$\boxed{I_n - M \text{ est inversible.}}$$

3°) On a : ${}^tAA = {}^t((I_n + M)^{-1})\,{}^t(I_n - M)(I_n - M)(I_n + M)^{-1}$.
Or pour toute matrice carrée inversible B, on a ${}^t(B^{-1}) = ({}^tB)^{-1}$, donc :

$${}^t((I_n + M)^{-1}) = ({}^t(I_n + M))^{-1} = (I_n - M)^{-1}$$

Ainsi ${}^tAA = (I_n - M)^{-1}(I_n + M)(I_n - M)(I_n + M)^{-1}$.
Or I_n et M commutent, donc $I_n - M$ et $I_n + M$ commutent et :

$${}^tAA = (I_n - M)^{-1}(I_n - M)(I_n + M)(I_n + M)^{-1} = I_nI_n = I_n$$

Cela suffit pour affirmer que :

$$\boxed{A \text{ est orthogonale.}}$$

Corrigé 22.12

3

1°) Si p est une projection orthogonale, alors $\operatorname{Ker} p$ et $F = \operatorname{Im} p$, qui sont supplémentaires, sont orthogonaux. Pour tout vecteur x de E, $p(x)$, qui appartient à $\operatorname{Im} p$, et $x - p(x)$, qui appartient à $\operatorname{Ker} p$, sont orthogonaux.

Le théorème de Pythagore donne alors :

$$\|x\|^2 = \|p(x) + (x - p(x))\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|}$$

2°) Si p, qui est une projection, n'est pas une projection orthogonale, alors $(\operatorname{Ker} p)^{\perp}$ n'est pas égal à $\operatorname{Im} p$.
Toutefois $\operatorname{Im} p$ et $(\operatorname{Ker} p)^{\perp}$ ont même dimension, donc $(\operatorname{Ker} p)^{\perp}$ n'est pas inclus dans $\operatorname{Im} p$.
Soit alors $x \in (\operatorname{Ker} p)^{\perp}$ tel que $x \notin \operatorname{Im} p$.
Le vecteur x n'est pas le vecteur nul et $p(x) = (p(x) - x) + x$ et comme x est orthogonal à $\operatorname{Ker} p$, x est orthogonal à $p(x) - x$ et le théorème de Pythagore donne cette fois :

$$\|p(x)\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|x\|^2 > \|x\|^2, \text{ puisque } x \notin \operatorname{Im} p \implies x - p(x) \neq 0.$$

On a donc trouvé un vecteur x tel que $\|p(x)\| > \|x\|$. Ainsi, par contraposée, si une projection vérifie : pour tout x, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$, alors p est une projection orthogonale.

Donc l'équivalence proposée dans l'énoncé est démontrée.

Corrigé 22.18

1°) Pour un vecteur u non nul, notons $p_u(x)$ la projection d'un vecteur x sur $\mathrm{Vect}(u)$. On a :

$$p_u(x) = \frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}\, u \text{ et donc } \|p_u(x)\| = \frac{|\langle x, u\rangle|}{\|u\|}.$$

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \neq 0$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $\langle e_k, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \langle e_k, e_i\rangle = u_k \|e_k\|^2$, donc

$$\|p_u(e_k)\| = \frac{|u_k|.\|e_k\|^2}{\|u\|}$$

Ainsi le vecteur u convient si et seulement si ses coordonnées sont telles que $|u_k|.\|e_k\|^2$ ne dépend pas de n (et est non nul).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et posons $\forall i \in [\![1, n]\!],\ u_i = \dfrac{\lambda}{\|e_i\|^2}$ et $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$, on a donc $\|p_u(e_k)\| = \dfrac{|\lambda|}{\|u\|}$ qui ne dépend pas de k.

2

$$\boxed{u = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|e_i\|^2} e_i \text{ convient}}$$

2°) On a dit dans la question précédente que les coordonnées d'un vecteur u adéquat dans la base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$ sont définies par leurs valeurs absolues et à un coefficient multiplicatif près, donc pour tout i, $|u_i| = \dfrac{|\lambda|}{\|e_i\|^2}$ et $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \|e_i\|^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\|e_i\|^2}$, d'où :

$$\boxed{\|p_u(e_k)\| = \frac{|u_k|.\|e_k\|^2}{\|u\|} = \frac{|\lambda|}{\|u\|} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|e_i\|^2}\Big)^{-1/2}}$$

Qui est bien indépendant du vecteur u choisi.

Corrigé 22.20

⋆ Si $H = K$ alors $s_H = s_K$ et s_H et s_K commutent évidemment.

⋆ Dire que $H^\perp \subset K$ c'est dire que si a est un vecteur non nul orthogonal à H, on a $a \in K$, et alors un vecteur non nul b orthogonal à K vérifie également $b \in H$ (puisque b est alors orthogonal à a).

Bref, suppoosns $H^\perp \subset K$ et soient $a, b \in E$ non nuls tels que $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$ et $K = \mathrm{Vect}(b)^\perp$. On a donc $a \in K$ et $b \in H$et a et b sont orthogonaux.

1

Enfin, $(H \cap K)^\perp = H^\perp + K^\perp = \mathrm{Vect}(a) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(b)$.

Soit $x \in E$. Il existe donc $u \in H \cap K$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $x = u + \lambda a + \mu b$. On a alors :

$$\begin{cases} s_H \circ s_K(x) = s_H(u + \lambda a - \mu b) = u - \lambda a - \mu b \\ s_K \circ s_H(x) = s_K(u - \lambda a + \mu b) = u - \lambda a - \mu b \end{cases}$$

On a bien prouvé que s_H et s_K commutent.

(On a même prouvé que $s_H \circ s_K = s_K \circ s_H = s_{H\cap K}$.)

⋆ Réciproquement, si s_H et s_K commutent. Avec les notations précédentes :

On a $s_H(a) = -a$, par conséquent, $s_H \circ s_K(a) = s_K \circ s_H(a) = -s_K(a)$. Ceci implique que $s_K(a) \in H^\perp = \mathrm{Vect}(a)$. Comme s_K est une isométrie, donc conserve les longueurs, on a $s_K(a) = a$ ou $s_K(a) = -a$.

Si $s_K(a) = a$ alors $a \in K$ et donc $H^\perp \subset K$. Si $s_K(a) = -a$ alors $a \in K^\perp$, c'est-à-dire que $K = \mathrm{Vect}(a)^\perp = H$.

$$\boxed{s_H \circ s_K = s_K \circ s_H \iff [\, H = K \text{ ou } H^\perp \subset K \,]}$$

Corrigé 22.32

1°) E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (elle contient $\|B\|^2$) minorée par 0. Elle admet une borne inférieure.

2°) Remarquons que $\|X\|^2 = 0 \iff X = 0$.

Si (S) admet au moins une solution, alors $0 \in E$ et $K = 0$. Les pseudo-solutions de (S) sont donc les éléments Y de $\mathbb{R}^n$ tels que $\|AY - B\|^2 = 0$, *i.e.* tels que $AY - B = 0$ d'après la remarque précédente.
Ce sont bien les solutions de (S).

3°) Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Posons $Z = X - Y$. Alors :

$$\|AX - B\|^2 = \|(AY - B) + AZ\|^2 = \|AY - B\|^2 + \|AZ\|^2 + 2\langle AZ, AY - B\rangle$$

Or $\langle AZ, AY - B\rangle = {}^t(AZ)(AY - B) = {}^tZ\,{}^tA(AY - B) = \langle Z, {}^tA(AY - B)\rangle$.

Donc en posant $U = {}^tA(AY - B)$,

$$\|AX - B\|^2 = \|AY - B\|^2 + \|AZ\|^2 + 2\langle Z, U\rangle$$

⋆ Supposons que Y soit solution de (S'), *i.e.* supposons que l'on a : ${}^tAAY = {}^tAB$.

Alors $U = 0$. Donc pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\|AX - B\|^2 = \|AY - B\|^2 + \|AZ\|^2 \geqslant \|AY - B\|^2.$$

Ceci prouve que Y est une pseudo-solution de (S).

⋆ Supposons que Y soit une pseudo-solution de (S).

Alors pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX - B\|^2 \geqslant \|AY - B\|^2$.

Quand X décrit $\mathbb{R}^n$, $Z = X - Y$ décrit également $\mathbb{R}^n$.
En utilisant l'expression établie précédemment, on en déduit que :

$$\text{pour tout } Z \in \mathbb{R}^n,\ \|AZ\|^2 + 2\langle Z, U\rangle \geqslant 0.$$

BONUS

On peut évidemment remplacer Z par λZ où λ est un réel quelconque. On a donc pour tout $Z \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda^2\|AZ\|^2 + 2\lambda\langle Z, U\rangle \geqslant 0$$

Le discriminant de ce trinôme en λ est donc négatif ou nul, ce qui donne $\langle Z, U\rangle^2 \leqslant 0$ et $\langle Z, U\rangle = 0$.

Le vecteur U est donc orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$: il est nul.
Ceci signifie que Y est solution de (S').

$$\boxed{Y \text{ pseudo-solution de } S \iff Y \text{ solution de } S'}$$

4°) ⋆ Soit $X \in \mathrm{Ker}\,A$. On a donc $AX = 0$, puis ${}^tAAX = 0$, donc $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,A \subset \mathrm{Ker}({}^tAA)$.

⋆ Soit maintenant $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$. On a donc ${}^tAAX = 0$, puis ${}^tX{}^tAAX = 0$.

Notons $Y = AX$. Ainsi ${}^tYY = 0$ *i.e.* $\|Y\|^2 = 0$, donc $Y = 0$, *i.e.* $AX = 0$. D'où $X \in \mathrm{Ker}\,A$.
Ainsi $\mathrm{Ker}({}^tAA) \subset \mathrm{Ker}\,A$.

Finalement, $\mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Ker}\,{}^tAA$ et comme $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et ${}^tAA \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, il vient en appliquant deux fois le théorème du rang :

$$\boxed{\mathrm{rg}\,A = n - \dim \mathrm{Ker}\,A = n - \dim \mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{rg}({}^tAA)}$$

5°) Si $\mathrm{rg}(A) = n$, alors $\mathrm{rg}({}^tAA) = n$. Or la matrice ${}^tAA$ est une matrice carrée de taille n, si elle est de rang n elle est inversible et le système (S') est donc de Cramer : il admet une unique solution *i.e.* (S) admet une unique pseudo-solution.

Corrigé 22.10

1°) Soit P le plan d'équation $x + y - 2z = 0$, ce plan est normal au vecteur $(1, 1, -2)$, ou mieux au vecteur $n = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$.

La projection orthogonale p sur $D = \mathrm{Vect}(n)$ est définie par $\forall u \in \mathbb{R}^3, p(u) = \langle u, n\rangle . n$ et la reflexion s_1 est définie par $s_1(u) = u - 2p(u) = u - 2\langle u, n\rangle\, n$.

Avec $u = (x, y, z)$ et $v = s(u) = (x', y', z')$, confondus avec les matrice colonnes canoniquement associées, cela s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{x + y - 2z}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \end{pmatrix}$$

(1)

Soit :

$$\boxed{M(s_1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

2°) On peut bien sûr faire une étude classique : matrice orthogonale de déterminant 1, donc matrice de rotation, puis recherche de l'axe et de l'angle ... On peut aussi voir :

Si on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = e_1$. On a donc $f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$ et f est une rotation autour de l'axe que l'on dirige par le vecteur $(1, 1, 1)$. En regardant le trièdre (Ox, Oy, Oz) selon cet axe, on voit que la rotation f est d'angle $2\pi/3$ (un cube est invariant par rotation d'angle $2\pi/3$ autour d'une diagonale).

3°) L'axe Δ de la rotation f est contenu dans le plan de la reflexion s_1.

On sait que l'on peut décomposer une rotation en produit de deux réflexions par des plans contenant cet axe et que l'on peut même fixer l'un des plans de réflexion.

Il suffit donc **ici** de poser $s_2 = s_1^{-1} \circ f = s_1 \circ f$ et $s_3 = f \circ s_1^{-1} = f \circ s_1$ (attention, en général la composée d'une réflexion et d'une rotation n'est pas une réflexion ...). Les matrices de s_2 et s_3 dans la base canonique sont donc respectivement

$$\boxed{M_2 = M(s_1)A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M_3 = AM(s_1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

On trouve les plans de réflexions de s_2 et s_3 en résolvant $M_2X = X$ et $M_3X = X$ avec $X = {}^t(x \quad y \quad z)$. On trouve pour s_2 le plan d'équation $2x - y - z = 0$ et pour s_3 le plan d'équation $2y - x - z = 0$.

Corrigé 22.15

1°) L'application Φ est clairement symétrique.

Elle est bilinéaire par linéarité de l'intégration. Elle est positive par positivité de l'intégration lorsque les bornes sont dans l'ordre croissant.

Enfin, soit $f \in E$ telle que $\Phi(f, f) = 0$. On a $\int_0^1 f(t)^2\, dt = 0$. Comme l'application f^2 est positive et continue sur $[0, 1]$, elle est nulle sur $[0, 1]$, et f est également nulle sur $[0, 1]$.

(3)

De plus, f est une combinaison linéaire des fonctions 1-périodiques e_1, e_2, e_3. Donc f est aussi 1-périodique. Elle est alors nulle sur $\mathbb{R}$. L'application Φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive :

$$\boxed{\Phi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2°) On note $\langle f, g\rangle = \Phi(f, g)$ et $\|f\| = \sqrt{\Phi(f, f)}$. Les calculs sont élémentaires :

- ⋆ $\|e_1\|^2 = 2\int_0^1 \frac{1}{2}\, dt = 1$
- ⋆ $\|e_2\|^2 = 2\int_0^1 \cos^2(2\pi t)\, dt = \int_0^1 (1 + \cos(4\pi t))\, dt = 1$

$\star$ $\|e_3\|^2 = 2\int_0^1 \sin^2(2\pi t)\,dt = \int_0^1 (1-\cos(4\pi t))\,dt = 1$

$\star$ $\langle e_1, e_2\rangle = \sqrt{2}\int_0^1 \cos(2\pi t)\,dt = 0$; $\langle e_1, e_3\rangle = \sqrt{2}\int_0^1 \sin(2\pi t)\,dt = 0$

$\star$ $\langle e_2, e_3\rangle = 2\int_0^1 \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)\,dt = \int_0^1 \sin(4\pi t)\,dt = 0$

La famille (e_1, e_2, e_3), qui est génératrice de E, est orthonormée, donc :

$$\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est une base orthonormée de } E.}$$

3°) a) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2 \in E$. $\tau_x(\lambda f_1 + \mu f_2)$ est l'application $t \mapsto (\lambda f_1 + \mu f_2)(x-t)$, c'est-à-dire est l'application $t \mapsto \lambda f_1(x-t) + \mu f_2(x-t)$, *i.e.* est l'application $\lambda \tau_x(f_1) + \mu \tau_x(f_2)$. Ainsi τ_x est linéaire.

Clairement $\tau_x(e_1) = e_1$ et pour $x, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \cos(2\pi(x-t)) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi t) + \sin(2\pi x)\sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi(x-t)) = \sin(2\pi x)\cos(2\pi t) - \cos(2\pi x)\sin(2\pi t) \end{cases}.$$

Autrement dit, $\tau_x(e_2) = \cos(2\pi x)e_2 + \sin(2\pi x)e_3$ et $\tau_x(e_3) = \sin(2\pi x)e_2 - \cos(2\pi x)e_3$.

Donc $\tau_x(e_1)$, $\tau_x(e_2)$ et $\tau_x(e_3)$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) = E$. Comme (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de E, on en déduit que $\tau_x(f) \in E$ pour tout $f \in E$. Ainsi f est bien un endomorphisme de E.

$\star$ Les calculs précédents montrent que la matrice de τ_x dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi x) & \sin(2\pi x) \\ 0 & \sin(2\pi x) & -\cos(2\pi x) \end{pmatrix}}$$

b) La matrice M est orthogonale puisque ses vecteurs colonnes sont clairement normés et deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$. Comme M est la matrice de τ_x dans une base orthonormale, on en déduit que τ_x est un automorphisme orthogonal.

c) Le plan $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ est stable par τ_x et la matrice de la restriction de τ_x à ce plan, dans la base (e_2, e_3) est :

$$N = \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) & \sin(2\pi x) \\ \sin(2\pi x) & -\cos(2\pi x) \end{pmatrix}$$

N est encore, bien sûr, orthogonale et son déterminant vaut -1. Il s'agit donc de la matrice d'une symétrie orthogonale, l'axe de cette symétrie étant donné par les vecteurs invariants. Or :

$$N\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (\cos(2\pi x) - 1)y + \sin(2\pi x)z = 0 \\ \sin(2\pi x)y - (1+\cos(2\pi x))z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2\sin^2(\pi x)y + 2\sin(\pi x)\cos(\pi x)z = 0 \\ 2\sin(\pi x)\cos(\pi x)y - 2\cos^2(\pi x)z = 0 \end{cases}$$

et comme on ne peut avoir à la fois $\cos(\pi x) = 0$ et $\sin(\pi x) = 0$, ce système équivaut à l'unique équation : $\sin(\pi x)y - \cos(\pi x)z = 0$ et l'axe de cette symétrie est la droite engendrée par le vecteur $\cos(\pi x)e_2 + \sin(\pi x)e_3$.

Le vecteur e_1 étant aussi invariant par τ_x, on conclut :

$$\boxed{\tau_x \text{ est la réflexion par rapport au plan } P = \mathrm{Vect}(e_1, \cos(\pi x)e_2 + \sin(\pi x)e_3)}$$

Corrigé 22.25

D'abord aucune des deux rotations, notées r_1 et r_2, n'est l'identité (sinon on pourrait considérer qu'elles ont le même axe). On peut donc écrire que r_1 (resp. r_2) est la rotation d'angle θ_1 (resp. θ_2), avec θ_1 et θ_2 non congrus à 0 modulo 2π, d'axe dirigé par le vecteur unitaire e_1 (resp. e_2), avec e_1 et e_2 non colinéaires (c'est-à-dire ni égaux ni opposés).

Puisque r_1 et r_2 commutent, on a en particulier :

$$r_1 \circ r_2(e_1) = r_2 \circ r_1(e_1), \text{ soit } r_1(r_2(e_1)) = r_2(e_1)$$

Donc $r_2(e_1)$ est invariant par r_1, donc est porté par l'axe de r_1 : $\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ r_2(e_1) = \lambda e_1$. Comme $r_2(e_1)$ a même longueur que e_1 (une rotation est une isométrie), il ne reste que les solutions : $r_2(e_1) = e_1$ ou $r_2(e_1) = -e_1$.

La solution $r_2(e_1) = e_1$ est à rejeter, car elle signifierait que e_1 est colinéaire à e_2. Donc $r_2(e_1) = -e_1$.

1

Or un vecteur ne peut être transformé en son opposé par une rotation que si ce vecteur est orthogonal à l'axe de la rotation et si celle-ci est d'angle π (on parle dans ce cas de demi-tour). Ainsi r_2 est un demi-tour et e_1 et e_2 sont orthogonaux.

En procédant de même à partir de la relation $r_1 \circ r_2(e_2) = r_2 \circ r_1(e_2)$, on montre que r_1 est aussi un demi-tour.

Ainsi deux rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$ qui commutent et qui n'ont pas le même axe sont des demi-tours autour d'axes orthogonaux.

Bien que ceci ne soit pas explicitement demandé, il serait dommage de ne pas étudier la réciproque :

Si r_1 et r_2 sont des demis-tours autour d'axes orthogonaux dirigés par les vecteurs unitaires e_1 et e_2, posons $e_3 = e_1 \wedge e_2$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. La base $\mathcal{B}$ est orthonormée directe et on a :

$$M_{\mathcal{B}}(r_1) = \operatorname{diag}(1, -1, -1) \text{ et } M_{\mathcal{B}}(r_2) = \operatorname{diag}(-1, 1, -1)$$

Il est clair que ces matrices commutent et leur produit est d'ailleurs $\operatorname{diag}(-1, -1, 1)$, donc $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$ est le demi-tour d'axe $e_1 \wedge e_2$. La réciproque est établie.

Corrigé 22.05

1°) D'une part, on a :

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y)\rangle = \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), f(y)\rangle + \|f(y)\|^2$$
$$= \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2 \times \|y\|^2} + \frac{1}{\|y\|^2}$$

D'autre part on a :

$$\left(\frac{\|x - y\|}{\|x\| \times \|y\|}\right)^2 = \frac{\|x^2\| - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2}{\|x\|^2 \times \|y\|^2} = \frac{1}{\|y\|^2} - 2\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2 \times \|y\|^2} + \frac{1}{\|x\|^2}$$

2

D'où :

$$\boxed{\|f(x) - f(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \times \|y\|}}$$

2°) Remarquons tout d'abord que l'inégalité est évidente si deux des vecteurs a, b, c, d sont égaux. On les suppose maintenant deux à deux distincts.

Soient $x, y, z \in E \setminus \{0\}$. L'inégalité triangulaire donne :

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\|$$

qui devient en utilisant la première question :

$$\frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|} \leqslant \frac{\|x - z\|}{\|x\|.\|z\|} + \frac{\|z - y\|}{\|z\|.\|y\|}$$

En multipliant par $\|x\| \times \|y\| \times \|z\|$, on obtient :

$$\|z\| \times \|x - y\| \leqslant \|y\| \times \|x - z\| + \|x\| \times \|z - y\|$$

En posant $x = b - a$, $y = d - a$ et $z = c - a$, on obtient :

$$\boxed{\|a - c\| \times \|b - d\| \leqslant \|a - b\| \times \|c - d\| + \|b - c\| \times \|a - d\|}$$