Correction Kholles MP : 24/09/2020

Kholle A :

Exercice 1 :

(a) $u_n \sim \frac{1}{n}$ donc par comparaison de séries à termes positifs, la série est divergente.

(b) $u_n \sim \frac{e^n}{e^{2n}} \sim e^{-n}$ donc par comparaison de séries à termes positifs, la série est convergente.

(c) $u_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc la série est absolument convergente.

(d) $u_n \sim \frac{e}{2n}$ donc par comparaison de séries à termes positifs, la série est divergente.

Exercice 2 :

On a

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} \sim \frac{1}{k^4}$$

donc la série converge.

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2} - 1 + 2\sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{3} - 3$$

Exercice 3 :

Notons que $\frac{a}{n^2+a^2} \sim \frac{a}{n^2}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$ existe.
La fonction $x \mapsto \frac{a}{x^2+a^2}$ est décroissante sur $[0\,;+\infty[$ donc par comparaison série-intégrale

$$\int_1^{N+1} \frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{n^2+a^2} \leq \int_0^N \frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$$

puis sachant

$$\int \frac{a}{x^2+a^2} = \arctan\frac{x}{a} + C^{te}$$

on obtient

$$\arctan\frac{N+1}{a} - \arctan\frac{1}{a} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{n^2+a^2} \leq \arctan\frac{N}{a}$$

Quand $N \to +\infty$,

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{a} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} \leq \frac{\pi}{2}$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 4 :

$u_n = R_{n-1} - R_n$ et la décroissance de $t \to 1/t$,

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{R_{n-1}-R_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_n}$$

On a

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln R_{n-1} - \ln R_n$$

donc la série à termes positifs $\sum \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge car $\ln R_n \to -\infty$ puisque $R_n \to 0$.
Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n/R_n$ diverge.

$$\frac{u_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_{n-1}-u_n} = \frac{u_n}{R_{n-1}} \frac{1}{1-u_n/R_{n-1}}$$

Si $u_n/R_{n-1} \not\to 0$ alors $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge.
Si $u_n/R_{n-1} \to 0$ alors $\frac{u_n}{R_{n-1}} \sim \frac{u_n}{R_n}$ et donc $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge encore.
Dans tous les cas, $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge.

Kholle B :

Exercice 1 :

On a

$$nu_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \exp\left[-\frac{1}{n}\ln n\right] \to 1$$

donc pour n assez grand

$$u_n \geq \frac{1}{2n}$$

et par comparaison de série à termes positifs on peut affirmer que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2 :

D'une part

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 2\mathrm{e}$$

D'autre part

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)+n-2}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

Exercice 3 :

(a) $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \frac{2n+1}{2n+2} = \ln\left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) \sim -\frac{1}{2n}$. La série $\sum \ln u_{n+1} - \ln u_n$ tend vers $-\infty$ donc $\ln u_n \to -\infty$ puis $u_n \to 0$.

(b) $\ln(n+1)u_{n+1} - \ln nu_n = \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2n}$. La série $\sum \ln(n+1)u_{n+1} - \ln nu_n$ tend vers $+\infty$ donc $\ln nu_n \to +\infty$ puis $nu_n \to +\infty$. À partir d'un certain rang $nu_n \geq 1$ donc $\sum u_n$ diverge.

(c) $(2k+4)v_{k+1} = 2u_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1}u_k = (2k+1)v_k$ en sommant pour $k \in \{0, \ldots, n\}$ et en simplifiant, on obtient : $T_n = 2 - (2n+6)v_{n+1}$ donc $T_n \to 2$.

Exercice 4 :

Notons que les termes sommés sont positifs.
La fonction $x \mapsto a^{\sqrt{x}}$ est décroissante donc

$$a^{\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} a^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

puis

$$\sum_{k=0}^{n} a^{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_{0}^{n} a^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 1 + 2\int_{0}^{\sqrt{n}} ua^{u}\,\mathrm{d}u$$

or $\int_0^{+\infty} ua^u\,\mathrm{d}u$ est définie donc

$$\sum_{n\geq 0} a^{\sqrt{n}} < +\infty$$

(a) Puisque la série $\sum a_n$ converge, on peut introduire sa somme

$$\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Les termes sommés étant strictement positifs, on a $\ell > 0$ et $S_n \to \ell$ donne alors $S_n \sim \ell$.

Défi :

Introduisons la somme partielle

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{a_n}}{n^3}$$

On remarque que pour $n \in \{10^{p-1}, \ldots, 10^p - 1\}$ on a $a_n = p$
En regroupant pertinemment les termes sommés

$$S_{10^q-1} = \sum_{p=1}^{q} \sum_{n=10^{p-1}}^{10^p-1} \frac{x^{a_n}}{n^3} = \sum_{p=1}^{q} \sum_{n=10^{p-1}}^{10^p-1} \frac{x^p}{n^3} = \sum_{p=1}^{q} u_p x^p$$

Puisque la fonction $t \mapsto 1/t^3$ est décroissante, on a la comparaison

$$\int_{10^{p-1}}^{10^p} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq u_p = \sum_{n=10^{p-1}}^{10^p-1} \frac{1}{n^3} \leq \int_{10^{p-1}-1}^{10^p-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

Après calculs, on obtient

$$u_p \sim \frac{99}{2}\frac{1}{100^p}$$

Cas $x \geq 0$
La série $\sum u_p x^p$ converge si, et seulement si, $x < 100$.
Puisque la série $\sum x^{a_n}/n^3$ est à termes positifs, sa convergence équivaut à la convergence d'une suite extraite de sommes partielles et donc $\sum x^{a_n}/n^3$ converge si, et seulement si, $x < 100$.
Cas $x < 0$.
Pour $x \in]-100\,;0[$, il y a absolue convergence de la série en vertu de l'étude qui précède.
Pour $x \leq -100$, on peut écrire $x = -y$ avec $y \geq 100$, on a alors

$$S_{10q-1} = \sum_{p=1}^{q} (-1)^q u_q y^q$$

avec $(u_q y^q)$ qui ne tend pas vers zéro.
Il y a alors divergence d'une suite extraite de sommes partielles et donc divergence de la série $\sum x^{a_n}/n^3$.

Défi (encore ….) :

5. a. Il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_n(\mathcal{D}) = \sum_{\substack{k\in\mathcal{D}:\\ 1\leqslant k\leqslant n}} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}^*:\\ 1\leqslant j^2\leqslant n}} \frac{1}{j^2} = \sum_{j=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{j^2}.$$

b. On déduit immédiatement de **a.** la convergence de la suite $\big(h_n(\mathcal{D})\big)_n$, c'est-à-dire de la série $\sum_n \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(n)}{n}$, avec :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(n)}{n} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

c. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Si $m^{1/6} \in \mathbb{N}^*$, alors $m = \big((m^{1/6})^3\big)^2 = \big((m^{1/6})^2\big)^3 \in \mathcal{D}\cap\mathcal{T}$. Réciproquement, si $m \in \mathcal{D}\cap\mathcal{T}$, alors il existe $i, j \in \mathbb{N}^*$ tels que $m = i^2 = j^3$. On a alors $\sqrt{j} = \frac{i}{j} \in \mathbb{Q}$, si bien que $j \in \mathcal{D}$ d'après le résultat admis : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $j = k^2$ et donc $m = k^6$, ce qui met en évidence que $m^{1/6} = k \in \mathbb{N}^*$.

d. On montre comme en **a.** et **b.**, d'après **c.**, que :

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\mathcal{T}) = \zeta(3) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} h_n(\mathcal{D}\cap\mathcal{T}) = \zeta(6).$$

En remarquant que $\mathbb{1}_{\mathcal{D}\cup\mathcal{T}} = \mathbb{1}_{\mathcal{D}} + \mathbb{1}_{\mathcal{T}} - \mathbb{1}_{\mathcal{D}\cap\mathcal{T}}$, on montre par ailleurs que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_n(\mathcal{D}\cup\mathcal{T}) = h_n(\mathcal{D}) + h_n(\mathcal{T}) - h_n(\mathcal{D}\cap\mathcal{T}),$$

d'où l'on déduit finalement la convergence de la série $\sum_n \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}\cup\mathcal{T}}(n)}{n}$, avec :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}\cup\mathcal{T}}(n)}{n} = \zeta(2) + \zeta(3) - \zeta(6).$$

www.rblld.fr

6. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall t \in [n, n+1], \quad \frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2t-1} \leqslant \frac{1}{2n-1}$$

d'où :

$$\forall t \in [n, n+1], \quad 0 \leqslant \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1} \leqslant \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

et finalement :

$$0 \leqslant u_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1}\right) \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \leqslant \frac{2}{(2n-1)^2}. \quad (2)$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient :

$$h_n(\mathcal{I}) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^* : \\ 1 \leqslant 2k-1 \leqslant n}} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \left(u_k + \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{2t-1}\right)$$

c'est-à-dire, par relation de Chasles et d'après la formule évidente $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h_n(\mathcal{I}) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \int_1^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} \frac{\mathrm{d}t}{2t-1} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \int_1^{\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor} \frac{\mathrm{d}t}{2t-1}.$$

c. Par définition de la partie entière, on a déjà :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n+1}{2} \leqslant \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{n+3}{2}.$$

En écrivant que le graphe de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$, concave sur $]-1, +\infty[$, se situe en dessous de sa tangente à l'origine, on justifie par ailleurs l'inégalité classique $\ln(1+x) \leqslant x$, valable pour tout $x > -1$.
Il ressort de ces deux points que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \ln\left\{\frac{1}{n}\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right\} \leqslant \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \leqslant \frac{2}{n}.$$

d. De l'équivalent $\frac{2}{(2n-1)^2} \sim \frac{1}{2n^2} \geqslant 0$, $n \to \infty$, on déduit la convergence de la série $\sum \frac{2}{(2n-1)^2}$ par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$, puis celle de la série $\sum u_n$ d'après **a.**. En notant δ la somme de cette série, la formule obtenue en **b.** donne alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_n(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n} &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \frac{1}{2}\ln\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right) - \ln\sqrt{n} \\ &= \delta - \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}^{\infty} u_k + \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1}{n}\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right\} \end{aligned} \quad (3)$$

Avec l'encadrement de la question **c.**, on en déduit que :

$$\lim_{n \to \infty} h_n(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n} = \delta.$$

e. D'après (2),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(k+1)-1}\right) = \frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n-1} \quad (4)$$

par télescopage.

f. À partir de (3), il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \delta - \left(h_n(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n}\right) = \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}^{\infty} u_k - \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1}{n}\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right\}$$

puis, d'après **c.** et (4),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\frac{1}{n} \leqslant \delta - \left(h_n(\mathcal{I}) - \ln\sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} \leqslant \frac{1}{2\left(\frac{n+1}{2} - 1\right) - 1} = \frac{1}{n-2}.$$

rblld.fr