Correction kholles 13 / 12 / 2021

Kholle A :

1.

⋆ Supposons (i) et montrons (ii).

D'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = 2 \operatorname{rg} f$, puisque $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Ainsi $\dim E$ est paire.

⋆ Supposons (ii) et montrons (i).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dim E = 2n$. Soit $(e_1, \dots, e_{2n})$ une base de E. Une application linéaire étant parfaitement définie par la donnée des transformés des vecteurs d'une base, on définit f linéaire de la manière suivante :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = 0_E,\ f(e_{i+n}) = e_i$$

Il est alors clair que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, donc f convient.

Si $\dim E = 0$, alors l'endomorphisme nul de E vérifie $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f\ (= E)$ et ce cas dégénéré rejoint le cas général.

2.

Les F_i sont des ev : facile à prouver.

Supposons $P_0 + \dots + P_n = 0$ avec $P_i \in F_i$

Donc $\forall i \in [\![0;n]\!]$: P_i a n racines (i n'en est pas une) et $(P_0 + \dots + P_n)(i) = 0$ donc $P_i(i) = \underbrace{-P_0(i) + \dots}_{=0}$

Donc P_i a $(n+1)$ racines et est de degré n donc $P_i = 0$.

Soit $P = P_0 + \dots + P_n$ avec $P_i \in F_i$

alors par $P(i) = P_i(i)$ car $P_j(i) = 0\ \forall i \neq j$:

On trouve $P_i = P(i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(X-j)}{i-j}$ (Lagrange)

On vérifie : $P_i \in F_i$ et $P = P_0 + \dots + P_n$ (unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange).

3.

D'une part

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

D'autre part

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{vmatrix} = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

4.

Comme ${}^tA = -A$ on a

$$\det A = \det {}^tA = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A$$

donc $\det A = 0$.
La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

fournit un contre-exemple au second problème posé.

5.

Ici ${}^tA = \bar{A}$, donc $\det(A) = \det({}^tA) = \det \bar{A}$.
Comme

$$\det \bar{A} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \overline{a_{\sigma(i),i}} = \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}} = \overline{\det A}$$

on peut conclure $\det A \in \mathbb{R}$.

6.

$F \cap G = F' \cap G' \Rightarrow F = (F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G'))$

Soit $x \in F$ alors $x \in F + (G \cap F')$ et $x \in F + (G \cap G')$ donc on a $\supset$

Soit $x \in F + (G \cap F')$: $x = y_1 + z_1$ avec $y_1 \in F$ et $z_1 \in G \cap F'$.
et $x \in F + (G \cap G')$: $x = y_2 + z_2$ avec $y_2 \in F$ et $z_2 \in G \cap G'$

Donc $y_1 + z_2 = y_2 + z_2 \Leftrightarrow \underset{F}{\underset{\cap}{y_1 - y_2}} = \underset{G}{\underset{\cap}{z_2 - z_1}}$ ainsi $\in F' \cap G'$

Donc $-z_1 = y_1 - y_2 - z_2 \in G'$

et $z_1 \in F'$ donc $z_1 \in F' \cap G' = F \cap G$

D'où $z_1 \in F$, $y_1 \in F$ donc $z_1 + y_1 = x \in F$.

Kholles B :

1.

(a) $\cos(0.x_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré 0.
$\cos(1.x_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré 1.
Par récurrence double, on montre que $\cos(jx_i)$ est un polynôme en $\cos(x_i)$ de degré j en exploitant la relation :

$$\cos((j+1)x_i) + \cos((j-1)x_i) = 2\cos(x_i)\cos(jx_i)$$

On peut aussi par récurrence affirmer que le coefficient dominant de $\cos(jx_i)$ est 2^{j-1} pour $j \geq 1$.
On peut même être plus précis et affirmer que $\cos((j-1)x_i)$ est une expression polynomiale de degré $j-1$ en $\cos(x_i)$.

(b) $\det M_n$ est une expression polynomiale en $\cos(x_1)$ de degré au plus $n-1$.
Puisque $\cos(x_2), \ldots, \cos(x_n)$ sont $n-1$ racines distinctes du polynôme correspondant, on peut écrire

$$\det M_n = \lambda(x_2, \ldots, x_n) \prod_{j=2}^{n} (\cos x_j - \cos x_1)$$

L'expression du coefficient $\lambda(x_2, \ldots, x_n)$ est polynomiale en $\cos(x_2)$ de degré au plus $n-2$ (car il y a déjà le facteur $\cos(x_2) - \cos(x_1)$ dans le produit) et puisque $\cos(x_3), \ldots, \cos(x_n)$ en sont des racines distinctes, on peut écrire

$$\lambda(x_2, \ldots, x_n) = \mu(x_3, \ldots, x_n) \prod_{j=3}^{n} (\cos x_j - \cos x_2)$$

En répétant la démarche, on obtient

$$\det M_n = \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos x_j - \cos x_i) = \alpha_n P$$

Il reste à déterminer la valeur de α_n ...
Un calcul immédiat donne $\alpha_2 = 1$.
En développant selon la dernière ligne

$$\det M_n = \cos((n-1)x_n) \det M_{n-1} + \cdots$$

où les points de suspensions contiennent une expression polynomiale en $\cos(x_n)$ de degré $< n-1$.
En identifiant les coefficients dominant des expressions polynomiale en $\cos(x_n)$ dans cette égalité, on obtient

$$\alpha_n = 2^{n-2} \alpha_{n-1}$$

Cette relation permet de conclure

$$\alpha_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

2.

Par contraposée: si e n'est pas une base de E alors $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \neq E$.
Soit H un hyperplan tel que $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \subset H$ et f une forme linéaire non nulle de noyau H.
On a $f(e_1) = \ldots = f(e_n) = 0$ mais $f \neq 0$.

3.

$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$

Soit $x \in F_i$, on a $x \in \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ donc $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec $\forall i \in [\![1;n]\!]$ $x_i \in E_i$

Donc $0 = \underset{F_1}{\underset{\cap}{x_1}} + \cdots + \underset{F_i}{\underset{\cap}{(x_i - x)}} + \cdots + \underset{F_n}{\underset{\cap}{x_n}}$ car $E_i \subset F_i$

Donc $x_i - x = 0$ car la somme est directe

et $x = x_i$.

4.

Posons $n = \dim E$. Comme $\det(f^2) = \det(-I_n)$ on a $\det(f)^2 = (-1)^n \geq 0$, donc n est pair.

5.

Par conjugaison d'une somme et de produits

$$\det \bar{A} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \overline{a_{\sigma(i),i}} = \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}} = \overline{\det A}$$

Bonus :

1)

$\star$ Soit $y \in \operatorname{Im}(f+g)$: $\exists x \in E$ tel que $y = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$ et donc $y \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
Ainsi $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$, d'où :

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im}(f+g) &\leqslant \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g).\\ &\leqslant \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)}$$

[Le fait que F soit de dimension finie n'est pas utile, puisque si E est de dimension finie, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont des sous-espaces de F qui sont, eux, de dimension finie et c'est ce qui sert dans le raisonnement précédent.]

$\star$ On a $f = (f+g) + (-g)$, donc le résultat précédent donne :

$$\operatorname{rg}(f) \leqslant \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(-g) = \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(g), \text{ donc } \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g) \leqslant \operatorname{rg}(f+g).$$

En échangeant les rôles de f et g, on a aussi :

$$\operatorname{rg}(g) - \operatorname{rg}(f) \leqslant \operatorname{rg}(g+f) = \operatorname{rg}(f+g).$$

Ces deux résultat peuvent s'énoncer en une seule fois :

$$\boxed{|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g)}$$

2)

Notons $B_k = A^k + A^{-k}$. En développant, on a, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$(A^{k+1} + A^{-(k+1)})(A + A^{-1}) = A^{k+2} + A^{-(k+2)} + A^k + A^{-k}$$

C'est-à-dire : $B_{k+1} = B_{k+1}B_1 = B_{k+2} + B_k$, ou encore :

$$\forall k \in \mathbb{N}, B_{k+2} = B_{k+1} - B_k$$

Quitte à raisonner coefficient par coefficient, on peut appliquer les résultats connus sur les suites récurrentes linéaires d'ordre deux.

L'équation caractéristique $r^2 - r + 1 = 0$ admet pour racines $r_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $r_2 = e^{-\frac{i\pi}{3}}$.
Ainsi :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \exists \lambda_{i,j}, \mu_{i,j} \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{N}, [B_k]_{i,j} = \lambda_{i,j} r_1^k + \mu_{i,j} r_2^k$$

Ce qui revient à dire qu'il existe $L, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall k \in \mathbb{N}, B_k = r_1^k L + r_2^k M$.

Comme $r_1^k = \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ et $r_2^k = \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$, on peut aussi dire qu'il existe des matrices carrées C et D telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, B_k = \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)C + \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)D$$

On a de plus $B_0 = 2I_n$ et $B_1 = I_n$. Les matrices C et D sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} C = 2I_n \\ \frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}D = I_n \end{cases}$$

On obtient ainsi $C = 2I_n$ et $D = 0$ et on a donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, A^k + A^{-k} = 2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)I_n}$$