Correction kholles MP 10/11/2021

Kholle A :

1)

(a) En linéarisant

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

(b) On connaît une primitive du logarithme ou l'on intègre par parties

$$\int_1^2 \ln t \, \mathrm{d}t = [t \ln t - t]_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

(c) On reconnaît une forme $u'/\sqrt{u}$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \, \mathrm{d}t = \left[\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

2)

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{1+(k/n)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln 2.$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+2k/n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x}} = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3} - 1.$$

3)

(a) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t/t$ est définie et continue sur $]0; +\infty[$, elle y admet donc une primitive F.

Pour $x > 0$, on a $[x\,;2x] \subset]0; +\infty[$, donc l'intégrale définissant $f(x)$ existe et

$$f(x) = F(2x) - F(x).$$

Puisque la fonction F est dérivable, la fonction f l'est aussi et

$$f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)}{x}.$$

L'étude pour $x < 0$ est similaire en considérant $t \mapsto \mathrm{e}^t/t$ définie et continue sur $]-\infty; 0[\supset [2x\,;x]$.

(b) Pour $x > 0$,

$$\forall t \in [x\,;2x], \mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^t \leq \mathrm{e}^{2x}$$

donc

$$\mathrm{e}^x \ln 2 \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{2x} \ln 2$$

puis

$$f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \ln 2.$$

L'étude est analogue en 0^-

4)

On a

$$\ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln(n+k)-\ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

La fonction $x \to \ln(1+x)$ étant continue sur $[0\,;1]$, on obtient

$$\ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$$

On en déduit

$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}} \to \frac{4}{\mathrm{e}}$$

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = 2\ln 2 - 1$$

donc

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n} \to \frac{4}{\mathrm{e}}$$

Pour $k \in \{1,\dots,n\}$, $\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ donc

$$1 \leq \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n} \leq 1+\frac{1}{n}$$

puis

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n} \to 1$$

5)6)

($\Leftarrow$) ok

($\Rightarrow$) Si $\int_a^b f \geq 0$ alors $\int_a^b f = \int_a^b |f|$ donne $\int_a^b |f(t)| - f(t)\mathrm{d}\,t = 0$. Or la fonction $|f| - f$ est continue et positive donc elle est nulle.

Le cas $\int_a^b f < 0$ est semblable.

Supposons $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$.

On peut écrire $\int_a^b f = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ avec $r = \left|\int_a^b f\right|$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Considérons alors $g : t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$.

On a $\int_a^b g = \left|\int_a^b f\right| \in \mathbb{R}$ donc $\int_a^b g = \int_a^b \operatorname{Re}(g)$.

Or $|g| = |f|$ et l'hypothèse de départ donne $\int_a^b |g| = \int_a^b \operatorname{Re}(g)$ puis $\int_a^b |g| - \operatorname{Re}(g) = 0$.

Puisque la fonction réelle $|g| - \operatorname{Re}(g)$ est continue, positive et d'intégrale nulle, c'est la fonction nulle.

Par suite $\operatorname{Re}(g) = |g|$ et donc la fonction g est réelle positive.

Finalement, la fonction f est de la forme $t \mapsto g(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ avec g fonction réelle positive.

La réciproque est immédiate.

Kholles B :

1)

(a) Par le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

(b) Via le changement de variable $t = \sin x$ (avec $x \in [0\,;\pi/2]$)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

2)

On peut écrire

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+2k/n)^3} = \frac{1}{n^2} S_n$$

avec

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+2k/n)^3}.$$

Par les sommes de Riemann, on a

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)^3} = \left[-\frac{1}{4(1+2t)^2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}.$$

On en déduit

$$u_n \sim \frac{2}{9n^2}.$$

3)

(a) En développant

$$f(x) = \int_0^x (\sin x \cos t - \cos x \sin t) g(t)\,\mathrm{d}t = \sin x \int_0^x \cos t g(t)\,\mathrm{d}t - \cos x \int_0^x \sin t g(t)\,\mathrm{d}t$$

f est donc dérivable et

$$f'(x) = \cos x \int_0^x \cos t g(t)\,\mathrm{d}t + \sin x \int_0^x \sin t g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \cos(t-x) g(t)\,\mathrm{d}t$$

(b) f' est dérivable et

$$f''(x) = -\sin x \int_0^x \cos t g(t)\,\mathrm{d}t + \cos x \int_0^x \sin t g(t)\,\mathrm{d}t + g(x) = -\int_0^x \sin(x-t) g(t)\,\mathrm{d}t + g$$

donc $f''(x) + f(x) = g(x)$.

(c) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Solution homogène $y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$.
Solution particulière $y(x) = f(x)$.
Solution générale

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x \sin(x-t) g(t)\,\mathrm{d}t$$

4)

(a) Soit $x \in]0;1[$, $[x\,;x^2] \subset]0;1[$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est définie et continue sur $]0;1[$ donc $\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ existe.
Pour $t \in [x^2\,;x]$,

$$\frac{1}{\ln x} \le \frac{1}{\ln t} \le \frac{1}{\ln x^2}$$

donc

$$\frac{x^2 - x}{\ln x^2} \le \varphi(x) \le \frac{x^2 - x}{\ln x}.$$

Quand $x \to 0^+$, $\varphi(x) \to 0$.
On a aussi

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t \ln t}$$

donc

$$\int_x^{x^2} \frac{x^2\,\mathrm{d}t}{t \ln t} \le \varphi(x) \le \int_x^{x^2} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t \ln t}$$

or

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_x^{x^2} = \ln 2.$$

Quand $x \to 1^-$, $\varphi(x) \to \ln 2$.
Finalement φ peut être prolongée par continuité en 0 et en 1.
(b) Soit F une primitive de $\frac{1}{\ln t}$ sur $]0;1[$.
On a $\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$ ce qui permet de dériver φ et d'obtenir

$$\varphi'(x) = \frac{x-1}{\ln x}.$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ est définie car on vérifie aisément que la fonction intégrée peut être prolongée par continuité en 0 et en 1 et on a

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = [\varphi(x)]_0^1 = \ln 2.$$

5)

On a

$$\ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln(n+k) - \ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

La fonction $x \to \ln(1+x)$ étant continue sur $[0\,;1]$, on obtient

$$\ln\left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$$

On en déduit

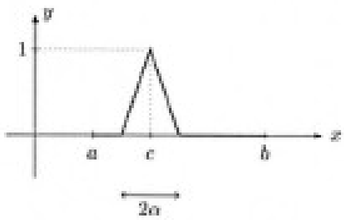
$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}} \to \frac{4}{\mathrm{e}}$$

6)

Par l'absurde supposons que la fonction f ne soit pas identiquement nulle. Il existe alors $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) \neq 0$ et l'on peut supposer $c \in]a\,;b[$ car, si f est nulle sur $]a\,;b[$, elle l'est aussi en a et b par continuité en ces points.

On définit une fonction g nulle sauf sur un voisinage de c sur lequel la fonction f est de signe constant.

Quitte à considérer $-f$, on peut supposer $f(c) > 0$. Par continuité de f en c, il existe $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $[c-\alpha\,;c+\alpha]$ soit inclus dans $[a\,;b]$ et que f soit strictement positive sur cet intervalle. Considérons alors la fonction g définie par la figure ci-dessous



La fonction g est continue et s'annule en a et b ce qui permet d'écrire

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t = 0.$$

Or la fonction g est nulle en dehors de $[c-\alpha\,;c+\alpha]$ et l'on obtient donc

$$\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t = 0.$$

La fonction $t \mapsto f(t)g(t)$ est alors continue, positive et d'intégrale nulle sur $[c-\alpha\,;c+\alpha]$, c'est donc la fonction nulle. Ceci est absurde car cette fonction ne s'annule pas en c.

Kholle C :

1)

(a)

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2} \underset{u=\ln t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$$

(b)

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t+1}} \underset{u=\ln t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u+1}} = \left[2\sqrt{u+1}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$$

(c)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1} \underset{u=\mathrm{e}^t}{=} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u = \left[\ln u - \ln(u+1)\right]_1^{\mathrm{e}} = \ln 2 - \ln(\mathrm{e}+$$

2)

On peut écrire

$$S_n = n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$$

et

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f : t \mapsto \sqrt{t}$ définie et continue sur $[0;1]$.
Par somme de Riemann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

donc

$$S_n \sim \frac{2}{3}n^{3/2}.$$

3)

(a) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

(b) Par sommation géométrique

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(c) $\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geq 0$ par intégration d'une fonction positive sur $[0\,;1]$.
De plus

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}$$

car $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$.

(d) On a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \to \frac{\pi}{4}$$

car

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \to 0$$

4)

La fonction $\varphi : t \mapsto f(t) - t$ est définie, continue sur $[0;1]$ et

$$\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2} = 0$$

donc φ s'annule.

5)

La fonction $x \mapsto \ln(1+\tan x)$ est définie et continue sur $[0\,;\pi/4]$ donc I existe.
$\ln(1+\tan x) = \ln(\cos x + \sin x) - \ln(\cos x)$ et $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.
Ainsi

$$I = \frac{\pi \ln 2}{8} + \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

or

$$\int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x \underset{t=\frac{\pi}{4}-x}{=} \int_0^{\pi/4} \ln\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$I = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

Suppléments :

1)
a)

Sur $\mathbb{R}$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}} \underset{u=\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+1} + C^{te} = \ln(\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1) - x + C^{te}.$$

b)

Sur $\mathbb{R}$,

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \underset{u=\cos x}{=} \int -\frac{\mathrm{d}u}{2-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos x-\sqrt{2}}{\cos x+\sqrt{2}}\right| + C^{te}$$

c)

Sur $]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$, $\int \frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x \underset{x=\sqrt{2}\sin t}{=} \int \sqrt{2}\sin t + 1\,\mathrm{d}t = -\sqrt{2}\cos t + t + C^{te} = -\sqrt{2-x^2} + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C^{te}$.

d)

$$\int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2) On constate que :

$$I_n = \int_0^1 x\frac{x^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}x\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x =$$

et que :

$$0 \le \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$$

car il est connu que $\ln(1+t) \le t$ pour $t > -1$.
On a alors

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \to 0$$

donc

$$u_n = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

3)

Nous notons E la fonction « partie entière » et nous introduisons les applications continues :

$$f : x \mapsto f(x) = |\sin x| \quad \text{et} \quad g : x \mapsto g(x) = \sqrt{x}\sin x$$

de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Il est clair que f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ et que :

$$f(x) = \frac{|g(x)|}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x)).$$

Nous considérons les applications :

$$F : x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{et} \quad G : x \mapsto G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Comme f est positive, F est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Soit x un nombre réel > 0. Nous posons $n = \mathrm{E}(x/\pi)$. On a $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$ donc $F(n\pi) \leqslant F(x) \leqslant F((n+1)\pi)$. Comme la fonction f admet π pour période, on a $F(n\pi) = nF(\pi) = 2n$.

Par suite $2\mathrm{E}\left(\frac{x}{\pi}\right) \leqslant F(x) \leqslant 2\mathrm{E}\left(\frac{x+\pi}{\pi}\right)$. De plus $2\mathrm{E}\left(\frac{x}{\pi}\right) \leqslant \frac{2x}{\pi} \leqslant 2\mathrm{E}\left(\frac{x+\pi}{\pi}\right)$.
Il en résulte que :

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{2x}{\pi}.$$

Une intégration par parties donne, pour tout nombre réel $x > 0$:

$$G(x) = -\underbrace{\sqrt{x}\cos x}_{= G_1(x)} + \underbrace{\int_0^x \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,dt}_{= G_2(x)}.$$

On a, pour tout réel $x > 0$:

$$|G_1(x)| = |\sqrt{x}\cos x| \leqslant \sqrt{x} \quad \text{et} \quad |G_2(x)| \leqslant \int_0^x \left|\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\right| dt \leqslant \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{x}$$

donc $|G(x)| \leqslant 2\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}x$. Ainsi $G(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(x)$ donc $G(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(F(x))$.