Soulignons que les termes sommés pour définir la série entière ont un sens car l'irrationalité de α donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n\pi\alpha) \neq 0$$

(a) Puisque

$$\frac{1}{|\sin(n\pi\alpha)|} \geq 1$$

la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge grossièrement en 1 et donc $R_\alpha \leq 1$.

(b) Par une récurrence facile, on montre $u_n \geq n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n^{u_n-1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n}$$

(c) On a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_{k+1}} \leq \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k} \frac{1}{u_k}$$

et puisque la suite (u_n) est croissante

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k} \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{K}{u_{n+1}}$$

avec

$$K = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}$$

On en déduit

$$\pi u_n \sum^{+\infty} \frac{1}{\quad} \leq \frac{K\pi u_n}{\quad} = \frac{K\pi}{\quad}$$

d'où

$$0 \leq -\sin(m\pi\alpha) \leq \frac{C}{u_n^{u_n-1}}$$

puis

$$-\frac{x^m}{\sin(m\pi\alpha)} \geq C\frac{(xu_n)^{u_n}}{u_n} \to +\infty$$

On en déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge pour tout $x > 0$ et donc $R_\alpha = 0$.

(e) Par l'absurde, supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$. Il existe alors un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q\alpha \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $qu_n\alpha \in \mathbb{N}$ or

$$qu_n\alpha = qu_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} + qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$$

avec comme vu ci-dessus

$$u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}$$

On en déduit

$$qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}$$

Or

$$0 < qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} < \frac{qKu_n}{u_{n+1}} \to 0$$

C'est absurde.

(a) $R = 1$.

(b) Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$, on a

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n) x^{n+1}$$

Après décalage d'indice et réunion des deux sommes

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) x^{n+1}$$

ce qui conduit à la relation demandée.

(c) Posons

$$g_n(x) = (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}$$

ce qui définit $g_n \colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue.
À l'aide du critère spécial des séries alternées, on montre que la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ ce qui assure que sa somme est continue. On en déduit par opérations sur les limites

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

(d) En regroupant les termes d'indices impairs et pairs consécutifs

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2n+1}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\right)^2\right)$$

Enfin par la formule du Wallis, on obtient

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}$$

(c) Pour $n \geq 2$, $a_n = \ln n - \ln(n-1) - 1/n$ donc

$$a_n x^n = \ln(n)x^n - \ln(n-1)x^n - \frac{1}{n}x^n$$

En sommant pour n allant de 2 à $+\infty$,

$$g(x) = (1-x)f(x) + \ln(1-x)$$

(d) Puisque $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$, la série $\sum |a_n|$ est convergente et donc la fonction g est définie et continue sur le segment $[-1\,;1]$. Par suite, la fonction g converge en 1^- et puisque le terme $\ln(1-x)$ diverge quand $x \to 1^-$, on obtient

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

(e) Puisque

$$f(x) = \frac{g(x) - \ln(1-x)}{1-x}$$

on obtient quand $x \to -1^+$,

$$f(x) \to \frac{g(-1) - \ln(2)}{2}$$

Il reste à calculer $g(-1)$ ...

$$g(-1) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\ln n - \ln(n-1)\right) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Or

$$1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

et en regroupant les termes pairs et impairs consécutifs

$$\sum_{n=2}^{2N+1} (-1)^n \left(\ln n - \ln(n-1)\right) = \sum_{p=1}^{N} 2\ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) - \ln(2N+1) = \ln \frac{2^{4N}(N!)^4}{(2N+1)!(2N)!} \to$$

en vertu de la formule de Stirling.
Finalement

$$g(-1) = \ln\frac{\pi}{2} + \ln(2)$$

On en déduit

$$f(x) \xrightarrow[x\to -1^+]{} \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}$$

(a) $u_n(z) = \frac{n^2+1}{3^n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \to \frac{|z|}{3}$ donc $R = 3$.

(b) $u_n(z) = z^n \mathrm{e}^{-n^2}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $n^2 u_n(z) \to 0$ donc $R = +\infty$.

(c) $u_n(z) = \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \frac{n^2}{(n+1)^2} |z|^2 \to |z|^2$ donc $R = 1$.

(d) $u_n(z) = \frac{n^n}{n!} z^{3n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)^n}{n^n} |z|^3 \to \mathrm{e}\,|z|^3$ donc $R = \mathrm{e}^{-1/3}$.

(a) $u_n(z) = n! z^n$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = (n+1)\,|z| \to +\infty$$

donc $R = 0$.

(b) $u_n(z) = \binom{2n}{n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |z| \to 4\,|z|$$

donc $R = 1/4$.

(c) $u_n(z) = \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} |z| \to 27\,|z|$$

donc $R = 1/27$.

(d)

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}} - 1\right)$$

or $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = -\frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2}.$$

Par suite $R = 1$.

(a) Posons
$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leq 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geq 1$.
Finalement $R = 1$.

(b) Posons $a_n = \sin n$.
(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leq 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geq 1$.
Finalement $R = 1$.

(c) Posons $a_n = (\sin n)/n^2$.
(a_n) est bornée donc $R \geq 1$.
Pour $|z| > 1$, la suite $\left(\frac{\sin n}{n^2}|z|^n\right)_{n\geq 1}$ ne tend pas vers 0 car la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0. On en déduit $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

$d(n) \not\to 0$ donc $R_d \leq 1$ $d(n) \leq n$ et le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} nz^n$ étant égal à 1 on a aussi $R_d \geq 1$. On peut conclure $R_d = 1$.
De même, en exploitant $s(n) \not\to 0$ et
$$s(n) \leq 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
on a $R_s = 1$.

Notons R' le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$.
Pour $|z| < \sqrt{R}$, $|z^2| < R$ et donc $\sum a_n(z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est absolument convergente.
Pour $|z| > \sqrt{R}$, $|z^2| > R$ et donc $\sum a_n(z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est grossièrement divergente.
On en déduit $R' = \sqrt{R}$.

Soit $r \in]0\,;R[$. La série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\frac{a_n}{n!}z^n = a_n r^n \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{r}\right)^n = \mathrm{o}\left(a_n r^n\right)$$
car par croissance comparée
$$\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{r}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Par comparaison de séries absolument convergentes, on peut affirmer que la série numérique $\sum \frac{a_n z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Le rayon de convergence de la série entière étudiée est $+\infty$.

(a) $\frac{1}{2}\left(f(z)+f(-z)\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z^n+(-1)^nz^n)=\sum_{p=0}^{+\infty}a_{2p}z^{2p}$.

(b) $\frac{1}{3}\left(f(z)+f(jz)+f(j^2z)\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\left(1+j^n+j^{2n}\right)z^n=\sum_{p=0}^{+\infty}a_{3p}z^{3p}$.

Puisque $S_n\to+\infty$, on a $R_a\leq 1$.
Comme $a_n\leq S_n$, on a aussi $R_a\geq R_s$.
Enfin $S_n/S_{n+1}=1-a_{n+1}/S_{n+1}\to 1$ permet par la règle de d'Alembert d'obtenir $R_s=1$.
On conclut $R_a=R_s=1$.
Pour $|x|<1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kx^kx^{n-k}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

On peut écrire

$$\ln(1-x^3)=\ln(1-x)+\ln(1+x+x^2)$$

donc sur $]-1\,;1[$,

$$\ln(1+x+x^2)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{3n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$$

avec

$$a_n=\frac{1}{n}\text{ si }n\neq 0\quad[3]\text{ et }a_{3n}=-\frac{1}{n}+\frac{1}{3n}=-\frac{2}{3n}$$

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}=\frac{a/(a-b)}{1-ax}+\frac{b/(b-a)}{1-bx}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}x^n$$

avec $R=\min\left(1/a,1/b\right)$.
On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n^2x^n=\frac{1}{(b-a)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(b^{2n+2}-2a^{n+1}b^{n+1}+a^{2n+2})x^n$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n^2x^n=\frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{b^2}{1-b^2x}-\frac{2ab}{1-abx}+\frac{a^2}{1-a^2x}\right)=\frac{1+abx}{(1-a^2x)(1-abx)(1-b^2x)}$$