f' ne s'annule pas $\Rightarrow$ f non périodique.

Si f est périodique de période k alors $f(x) = f(x+k)$ donc par Rolles $\exists\, c \in [x ; x+k]$ tq $f'(c) = 0$ ↯.

$f \in C^n$ s'annulant $n+1$ fois.

a) Par Rolles entre chaque zero de f, f' s'annule n fois et est continue et dérivable sur I donc de la même manière f'' s'annule $(n-1)$ fois par Rolles ....

b) $g(x) = e^{\alpha x} f(x)$ $\quad g'(x) = e^{\alpha x}(f'(x) + \alpha f(x))$

donc g' s'annule ssi $f' + \alpha f$ s'annule.

Or g s'annule là où f s'annule et est C^n donc

g' s'annule $(n\ )$ fois et donc $f' + \alpha f$ aussi et par le raisonnement de la Q(a) : $(f' + \alpha f)^{(n-1)}$ s'annule 1 fois.

$P \in \mathbb{R}[X]$, $e^x = P(x)$ a un nombre fini de solutions réelles.

Supposons un nbre infini de solutions alors $f(x) = e^x - P(x)$ a un nombre infini de zéro et est C^∞.

Or par Rolles entre ces zéros $f'(x)$ a un nombre infini de 0 également et ainsi de suite ($f^{(n)}(x)$ a un nombre infini de 0 $\forall n \in \mathbb{N}$) or

$f^{(\deg(P)+1)}(x) = e^x$ ne s'annule pas d'où ↯.

Racines, dérivées et arctan(x) :

1) <u>Par récurrence</u> : I : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad P_0(X) = 1$

H : Si $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_{n-1}(x)}{(x^2+1)^n}$ alors

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n-1}'(x)(x^2+1)^n + 2xn(x^2+1)^{n-1}P_{n-1}(x)}{((x^2+1)^n)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1)^{n-1}\left((x^2+1)P_{n-1}'(x) + 2xn\,P_{n-1}(x)\right)}{(x^2+1)^{2n}}$$

$$= \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n-1}} \quad \text{avec } P_n(x) = (x^2+1)P_{n-1}'(x) + 2xn\,P_{n-1}(x).$$

Ccl : ✓.

2) f impair et C^∞ $\Rightarrow$ $f^{(2n)}$ impair et $f^{(2n+1)}$ pair

Or $1+x^2$ pair donc $f^{(n)}$ a même parité que P_{n-1}

donc n pair $\Rightarrow$ P_n pair

n impair $\Rightarrow$ P_n impair.

le coefficient dominant est $(-1)^n(n+1)!$ et de degré n.

<u>Par récurrence</u> : I : $n=0$ marche

H : $P_n(x) = (x^2+1)\left((-1)^{n-1}(n)!\,x^{n-1} + R\right)' + 2xn\left((-1)^n(n)!\,x^{n-1} + R\right)$

avec $d^\circ R < n-1$ donc $d^\circ R' < n-2$

$$= (-1)^{n-1} n! \times (n-1)x^{n-2}x^2 + R'x^2 + R' + (-1)^{n-1}n!\,x^{n-1} + 2xn(-1)^n n!\,x^{n-1} + 2xnR.$$

$$= \underbrace{\left((-1)^{n-1}n!(n-1) + 2n(-1)^n n!\right)}_{(-1)^n n!\left[-(n-1)+2n\right] = (-1)^n n!(n+1) = (-1)^n(n+1)!}x^n + Q \quad \text{avec } d^\circ Q < n.$$

Ccl : ✓

3) $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$ avec $d^\circ P_{n-1}(x) = n-1 < 2n$

donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f^{(n)}(x) = 0$

4) P_n admet au max n racines.

Montrons que P_n admet n racines réelles distinctes par récurrence :

$\underline{I}$: P_0 a 0 racine.
P_1 a 1 racine car de $d^\circ \underline{1}$ et à l'aide du TVI.

$\underline{H}$: Supposons que P_n a n racines distinctes.
Ainsi $f^{(n)}$ possède $n-1$ zéros distincts notés $x_1, \dots, x_{n-1}$ (ordonnés croissant)
et $f^{(n)}$ est dérivable (C^∞ en fait) donc par Rolles $f^{(n+1)}$ s'annule entre x_i et x_{i+1}
donc $n-2$ fois
mais $f^{(n)}(x_1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f^{(n)}(x) = 0$ donc par extension de Rolles $\exists\, x_0 \in]-\infty ; x_1[$
cf "Rolles en $+\infty$" tq $f^{(n+1)}(x_0) = 0$

de m̂ en $+\infty$ avec x_{n-1}

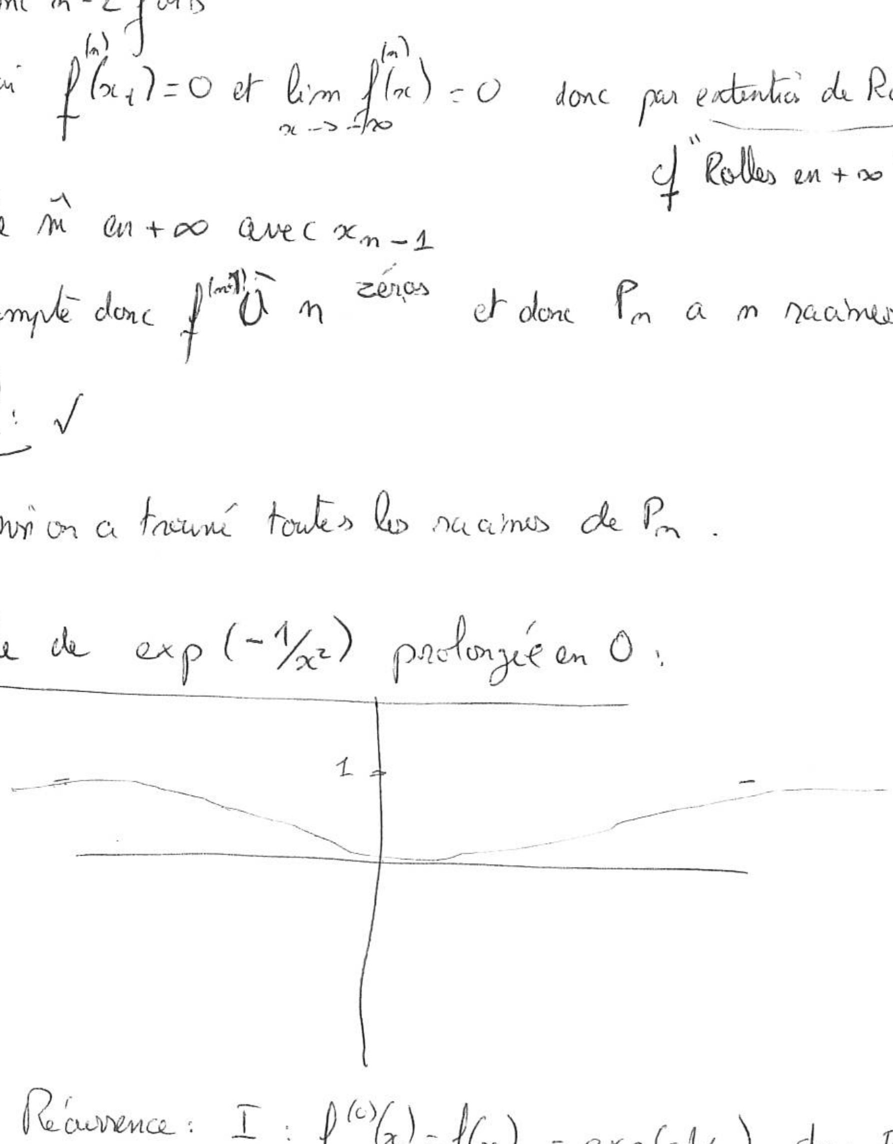
On compte donc $f^{(n+1)}$ a n zéros et donc P_n a n racines (distinctes).

$\underline{\text{ccl}}$: ✓

Ainsi on a trouvé toutes les racines de P_n.

Étude de $\exp(-1/x^2)$ prolongée en 0 :

a)



b) $-\dfrac{1}{x^2}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$
et $-\dfrac{1}{x^2} \neq 0$
$\exp$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$
donc $\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

c) Récurrence : $\underline{I}$: $f^{(0)}(x) = f(x) = \exp(-1/x^2)$ donc $P_0(x) = x^{3n}$.

<u>Hérédité</u> : $f^{(n+1)}(x) = \frac{2}{x^3}\exp(-1/x^2)\frac{P_n(x)}{x^{3n}} + \frac{P_n'(x)x^{3n} - 3nx^{3n-1}P_n(x)}{(x^{3n})^2}\exp(-1/x^2)$

$(\exp(-1/x^2))' = \frac{2}{x^3}$

$$= \exp(-1/x^2)\left[\frac{2P_n(x)}{x^{3n+3}} + \frac{x^{3n-1}}{x^{2\times 3n}}\left(P_n'(x)x - 3nP_n(x)\right)\right]$$

$$= \exp(-1/x^2)\,\frac{P_n(x)(2-3n)+xP_n'(x)}{x^{3n+1}}$$

$$= \exp(-1/x^2)\,\frac{x^2P_n(x)(2-3n)+x^3P_n'(x)}{x^{3n+3}}$$

Donc $P_{n+1}(x) = (2-3n)x^2P_n(x)+x^3P_n'(x)$

<u>Ccl</u> : OK

d) $\forall n\in\mathbb{N}$ $f^{(n)}(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ donc par le prolongement de la dérivée (appliqué à chaque dérivée)

$f\in C^\infty$ et $f^{(n)}(0)=0$

plus propre : à rédiger par récurrence.

<u>Majoration de f' à l'aide de celle de f et de f''.</u>

1) Si $M_2=0$ alors $f''=0$ donc f' est constant donc c'est trivial.

2) $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$

$g'(h) = \frac{-2M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2} = \frac{-4M_0 + h^2M_2}{2h^2}$

$M_2h^2 - 4M_0 \geqslant 0 \iff M_2h^2 \geqslant 4M_0$
$\iff h^2 \geqslant \frac{4M_0}{M_2}$ car $M_2 \neq 0$
$\iff h \geqslant \sqrt{\frac{4M_0}{M_2}}$ ou $h \leqslant -\sqrt{\frac{4M_0}{M_2}}$

h	0		$\sqrt{\frac{4M_0}{M_2}}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

et $g\left(\sqrt{\frac{4M_0}{M_2}}\right) = \frac{2M_0\sqrt{M_2}}{\sqrt{4M_0}} + \frac{M_2\sqrt{4M_0}}{2\sqrt{M_2}}$
$= \sqrt{M_0M_2} + \sqrt{M_2M_0} = 2\sqrt{M_0M_2}$

3) Par Taylor Lagrange : $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(c)\frac{h^2}{2}$

entre x et $x+h$

$$\text{Ainsi } |f'(x)| \leq \frac{|f(x+h)|+|f(x)|}{h} + \frac{h}{2}|f''(c)|$$

$$\leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$$

$$\leq g(h) \quad \text{Vraie } \forall h>0$$

4) Marche pour le min $g(h)$ qui est atteint donc $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$

5) Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ et $x-h$ et x :

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(c) \qquad c\in]x;x+h[$$
$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(d) \qquad d\in]x-h;x[$$

donc $f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+\frac{h}{4}(f''(d)-f''(c))$

donc $|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h}+\frac{M_2 h}{2}$ Par le m raisonnement que 2)

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0 M_2}$$

<u>f continue sur $[0;a]$, dérivable $]0;a]$, $f(0)=0$ et $f(a)f'(a)<0$.</u>

Supposons $f(a)>0$ donc $f'(a)<0$

donc $\exists b\in]0;a[$ tq $f(b)>f(a)$

donc par le TVI, $\exists \alpha \in]0;b[$ tq $f(\alpha)=f(a)$ puis par Rolles ✓.

De m avec $f(a)<0$

$$\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{1/x}\right).$$

On fait le TAF entre x et $x+1$ sur $f(x)=xe^{1/x}$ (C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$f'(x) = e^{1/x} - \frac{x}{x^2}e^{1/x} = e^{1/x}(1-\frac{1}{x})$)

et donc $\exists c_x \in]x;x+1[$ tq

$$(x+1)e^{1/x+1} - xe^{1/x} = f'(c_x)(x+1-x)$$
$$= f'(c_x)$$

Or $c_x \geq x$ donc $\lim_{x\to+\infty} c_x = +\infty$

Or $f'(c_x) = e^{1/c_x}(1-\frac{1}{c_x}) \xrightarrow[c_x\to+\infty]{} 1$

donc $\lim_{x\to+\infty} (x+1)e^{1/x+1} - xe^{1/x} = 1$

$f\in C^2(\mathbb{R}_+)$ tq $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ alors ....?

---

a) Si f'' est bornée, $|f''(x)|\leq M \quad \forall x\in\mathbb{R}_+$

$x_n = \frac{\varepsilon n}{M} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $f(x_{n+1}) - f(x_n) = 0$

Donc $\exists N>0$ tq $\forall n\geq N \quad |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq \frac{\varepsilon^2}{M}$

Or $|f'(c_n)|(x_{n+1}-x_n) \leq \frac{\varepsilon^2}{M}$ (par le TAF $\exists c_n \in]x_n;x_{n+1}[$ tq)

d'où $|f'(c_n)|\leq\varepsilon$.

Par le TAF de nouveau : $|f'(u) - f'(c_n)| \leq M(u-c_n) \leq \varepsilon$

d'où $|f'(u)|\leq 2\varepsilon$. $\forall u\in[x_n;x_{n+1}]$ $(\forall n\geq N)$

D'où $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

b) C.E. classique : $f(t) = \frac{\cos(t^2)}{t+1}$.

$f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ tq $f'(0)=0$: $\exists g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1 tq $f(x)=g(x^2)$

On pose $g(t)=f(\sqrt{t})$ (donc $g(x^2)=f(x)$)

g est continue par composé

$g'(t)=\frac{f'(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$ donc g dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (m̂ C^1)

et $g'(t)=\frac{f'(\sqrt{t})-f'(0)}{2\sqrt{t}} \longrightarrow \frac{f''(0)}{2}$ donc g est $C^1(\mathbb{R}_+)$.