Condition dans Rolles.

f continue sur $[a,b]$ ou f dérivable sur $]a,b[$ sont essentiel :

$f : [0;1] \to \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall x \in]0;1]$ $f(x) = 1 - x$ et $f(0) = 0$: $f(0) = f(1)$ et $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in]0;1]$.

$f : [-1;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 et $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in [-1;1]$.

Rolles en $+\infty$: f continue sur $[a;+\infty[$ et dérivable sur $]a;+\infty[$ tq $\lim\limits_{+\infty} f(x) = f(a)$

alors $\exists c$ tq $f'(c) = 0$.

Si f est constant : évident

Sinon $\exists b \in]a;+\infty[$ tq $f(b) \neq f(a)$

donc par le TVI, il existe $A \in]b;+\infty[$ tq $f(A) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ (Vu que $\exists M > b$ tq $f(M) = f(a) \pm \varepsilon$ par limite)

et $B \in]a;b[$ tq $f(B) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ donc par Rolles sur $f(A)$ et $f(B)$ $\exists c$ tq $f'(c) = 0$.

f est continue et strictement croissante, $f(0) = 0$ et $f(\pi/2) = 1 + \pi/2$ donc f réalise une bijection de $[0\,;\pi/2]$ vers $[0\,;1+\pi/2]$ et son application réciproque f^{-1} est continue.
f est dérivable sur $]0\,;\pi/2]$ avec

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 1 > 0$$

donc f^{-1} est dérivable sur $f(]0\,;\pi/2]) =]0\,;1+\pi/2]$.
Étude de la dérivabilité de f^{-1} en 0
Quand $h \to 0^+$, en posant $x = f^{-1}(h) \to 0$

$$\frac{f^{-1}(h) - f^{-1}(0)}{h} = \frac{x}{f(x)}$$

Or

$$\frac{x}{f(x)} = \frac{x}{\sqrt{\sin x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x} + o(\sqrt{x}) + x} \sim \sqrt{x} \to 0$$

donc f^{-1} est dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0) = 0$.

Soit f solution. En dérivant la relation par rapport à x, on obtient :

$$f'(x+y) = f'(x)$$

La fonction f est donc de dérivée constante et par suite f est affine.
De plus la relation $f(0+0) = f(0) + f(0)$ entraîne $f(0) = 0$ et donc f est linéaire.
Inversement : ok.

D'une part

$$\left(x^{2n}\right)^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!}x^n$$

D'autre part

$$\left(x^{2n}\right)^{(n)} = (x^n \times x^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^n)^{(k)} (x^n)^{(n-k)}$$

et donc

$$\left(x^{2n}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{k!} x^n = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 x^n$$

On en déduit

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$$

(a) La fonction $g\colon x \mapsto f(x)/x$ est définie, continue et dérivable sur $]0\,;a]$.
Quand $x \to 0$,

$$g(x) \to f'(0) = 0$$

Prolongeons g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.
Puisque g est continue sur $[0\,;a]$, dérivable sur $]0\,;a[$ et puisque $g(0) = g(a)$, le théorème de Rolle assure l'annulation de la dérivée de g en un point $c \in \,]0\,;a[$.

(b)

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

donc $g'(c) = 0$ donne $cf'(c) = f(c)$.
La tangente à f en c a pour équation :

$$y = f'(c)(x-c) + f(c) = f'(c)x$$

Elle passe par l'origine.

En appliquant le théorème des accroissements finis à $x \mapsto x^{1/x}$ entre n et $n+1$, on obtient

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{1 - \ln c}{c^2} c^{1/c}$$

avec $c \in \,]n\,;n+1[$.
Puisque $c \sim n \to +\infty$, $\ln c \sim \ln n$ et puisque $c^{1/c} \to 1$

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$$