Correction MP 04/04/2022 :

Kholle A :

Théorème de convergence dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (voire dans un espace normé de dimension finie E).

On suppose que :

i. la suite (f_n) converge simplement sur I vers une certaine fonction f ;

ii. f et les f_n sont continues par morceaux sur I ;

iii. il existe une fonction φ positive et sommable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ \|f_n(t)\| \leq \varphi(t)$.

Alors f et les f_n sont sommables sur I et l'on a :

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \lim_n \int_I f_n(t)\mathrm{d}t .$$

(a) Posons

$$\varphi : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t}$$

La fonction φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et vérifiant $t^2\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Par domination, on obtient que F est définie sur $I = \mathbb{R}$.

(b) Posons $f(x,t) = \varphi(t)\cos(xt)$.
f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t})\sin(xt)$$

$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} = \psi(t)$ avec ψ intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
On en déduit que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t})\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-a+ix)t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{x}{a^2+x^2}$$

donc

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4+x^2}{1+x^2}\right) + C^{te}$$

Montrons que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ quand $x \to +\infty$.

Par intégration par parties

$$F(x)=\left[\varphi(t)\frac{\sin(xt)}{x}\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\varphi'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit

$$|F(x)|\leq\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Par suite $C^{te}=0$ puis

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{4+x^2}{1+x^2}$$

Pour $x\in[0\,;2\pi]$, on peut écrire

$$\mathrm{e}^{2\cos x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n\cos^n x}{n!}$$

Posons

$$f_n\colon x\in[0\,;2\pi]\mapsto\frac{2^n\cos^n x}{n!}$$

Les fonctions f_n sont continues et la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0\,;2\pi]$ puisque

$$\|f_n\|_\infty\leq\frac{2^n}{n!}=\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On peut donc intégrer terme à terme pour obtenir

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{2\cos x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}\int_0^{2\pi}(\cos x)^n\,\mathrm{d}x$$

Par intégration par parties (cf. intégrale de Wallis)

$$\int_0^{2\pi}(\cos x)^n\,\mathrm{d}x=\frac{n-1}{n}\int_0^{2\pi}(\cos x)^{n-2}\,\mathrm{d}x$$

Sachant

$$\int_0^{2\pi}(\cos x)^0\,\mathrm{d}x=2\pi\text{ et }\int_0^{2\pi}(\cos x)^1\,\mathrm{d}x=0$$

on obtient

$$\int_0^{2\pi}(\cos x)^{2p}\,\mathrm{d}x=2\pi\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\text{ et }\int_0^{2\pi}(\cos x)^{2p+1}\,\mathrm{d}x=0$$

et donc

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{2\cos x}\,\mathrm{d}x=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2^{2p}}{(2p)!}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}2\pi=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2\pi}{(p!)^2}$$

Kholle B :

(a) Posons $f(x,t) = \ln(\cos^2(t) + x^2\sin^2(t))$ définie sur $]0\,;+\infty[\times [0\,;\pi/2]$.
Pour chaque $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ étant continue par morceaux sur $[0\,;\pi/2]$, l'intégrale définissant $F(x)$ est bien définie.
Pour chaque $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2x\sin^2(t)}{\cos^2(t) + x^2\sin^2(t)}$$

Soit $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$.

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times [0\,;\pi/2], \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2b}{\cos^2(t) + a^2\sin^2(t)} = \varphi_{a,b}(t)$$

avec la fonction $\varphi_{a,b} : [0\,;\pi/2] \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable.
Par domination sur tout segment, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{2x\sin^2(t)}{\cos^2(t) + x^2\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = \tan t$

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2x}{(1+x^2u^2)(1+u^2)}\,\mathrm{d}u$$

Par décomposition en éléments simples (si $x \neq 1$)

$$\frac{2xX}{(1+x^2X)(1+X)} = \frac{2x/(x^2-1)}{1+X} - \frac{2x/(x^2-1)}{1+x^2X}$$

et donc

$$F'(x) = \frac{2x}{x^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{x+1}$$

et la relation vaut aussi pour $x = 1$ par argument de continuité.
On en déduit

$$F(x) = \pi\ln(x+1) + C^{te}$$

Sachant $F(1) = 0$, on conclut

$$F(x) = \pi\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Soit $f_n\colon [0\,;+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(t)=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}$$

On observe $\|f_n\|_\infty=1/n^2$ et donc la série des fonctions f_n converge normalement, donc uniformément sur $[0\,;+\infty[$. Puisque chaque f_n est continue, on peut affirmer que la fonction

$$S\colon t\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}$$

est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{n^2+t^2}=\frac{\pi}{2n}$$

Puisque la série $\sum\int|f_n|$ diverge, on ne peut intégrer terme à terme par le théorème de Fubini.
Raisonnons alors par les sommes partielles en exploitant le théorème de convergence dominée.
Posons

$$S_n\colon t\mapsto\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et converge simplement vers la fonction S elle-même continue par morceaux.

De plus, le critère spécial des séries alternées s'appliquant, on a

$$0\leq S_n(t)\leq\frac{1}{1+t^2}=\varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^{+\infty}S_n(t)\,\mathrm{d}t\to\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{+\infty}S_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

donc

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de la série introduite.

Kholle C :

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$,

$$\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{O}(1) \text{ et } \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{t\to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Posons $g(x,t) = \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}$.

g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ avec

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\cos(xt)$$

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.

Enfin $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Par domination, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, *a fortiori* continue et dérivable.

(c) La décomposition

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}$$

permet d'écrire

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

Par la majoration $|\sin(u)| \leq |u|$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \left|\sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\right| \leq \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

La série $\sum \int_{[0;+\infty[} \left|\sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\right| \mathrm{d}t$ converge, on peut intégrer terme à terme

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

On calcule l'intégrale sommée en considérant la partie imaginaire de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{it}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

On obtient à terme

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

On sait que la fonction ζ est continue.

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1)\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\,\mathrm{d}x$$

avec

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{n^x} = \frac{1}{n^2 \ln n}$$

La convergence de la série des intégrales des valeurs absolues assure la convergence de l'intégrale du premier membre et permet de permuter intégrale et somme. On obtient alors

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$$

Bonus :

Réalisons le changement de variable $t = u(x) + \theta(v(x) - u(x))$

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t = (v(x) - u(x)) \int_0^1 f(x, u(x) + \theta(v(x) - u(x))\,\mathrm{d}\theta$$

Considérons la fonction

$$g\colon (x,\theta) \mapsto f(x, u(x) + \theta(v(x) - u(x))$$

Pour $[a\,;b] \subset I$, la fonction g est continue sur le compact $[a\,;b] \times [0\,;1]$ et donc bornée. Par conséquent, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall (x,\theta) \in [a\,;b] \times [0\,;1], |g(x,\theta)| \leq M = \varphi(\theta)$$

La fonction φ est intégrable sur $[0\,;1]$ et donc, par domination sur tout segment, on peut affirmer la continuité de la fonction

$$x \mapsto \int_0^1 g(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

On en déduit la continuité de la fonction étudiée par produit.