Khôlles

02/05/18

Correction

(a) La probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de k lancers est $(5/6)^k$. Il s'agit donc ici de trouver le plus petit k pour lequel $(5/6)^k \leq 1/2$. On obtient $k = 4$.

(b) On veut $(35/36)^k < 1/2$ et on obtient $k = 25$.

Notons A_i l'événement « une boule blanche est obtenue lors du i-ème tirage ». Les événements A_i sont mutuellement indépendants et $\mathrm{P}(A_i) = p$ pour tout i.

(a) Notons B_n l'événement « la première boule blanche apparaît lors du n-ième tirage ».
On peut écrire

$$B_n = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n.$$

Par indépendance, on obtient

$$\mathrm{P}(B_n) = (1-p)^{n-1}p.$$

(b) Notons C_{n-1} l'événement « $k-1$ boules sont apparues lors des $n-1$ premiers tirages »
et D_n l'événement « la k-ième boule blanche tirée apparaît lors du n-ième tirage ».
On a $D_n = C_{n-1} \cap A_n$ et

$$\mathrm{P}(C_{n-1}) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

car il s'agit de la probabilité d'obtenir $k-1$ succès dans la répétition indépendante d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
Par indépendance, on conclut

$$\mathrm{P}(D_n) = \mathrm{P}(C_{n-1} \cap A_n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(a) Pour chaque tirage faisant apparaître les nombres a, b, c dans le bon ordre, il y en a 5 autres où ces mêmes nombres apparaissent dans le désordre. La probabilité recherchée est donc égale à $1/6$.

(b) Un tirage s'apparente à une fonction de $[\![1\,;3]\!]$ vers $[\![1\,;10]\!]$. Il y a 10^3 fonctions toutes équiprobables. Parmi celles-ci, on recherche les fonctions strictement croissantes. Celles-ci sont simplement déterminées par les 3 valeurs qu'elles prennent qu'il suffit ensuite d'ordonner. Déterminer

Corrigé 5.04

On rappelle que $\mathcal{R}$ est une relation binaire antisymétrique sur $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ si et seulement si :

$$\forall (a, b) \in E^2, [(a \,\mathcal{R}\, b \text{ et } b \,\mathcal{R}\, a) \implies a = b]$$

Pour définir une relation binaire $\mathcal{R}$, il faut lister tous les couples (a_i, a_j) de $E \times E$ et dire à chaque fois si $a_i \,\mathcal{R}\, a_j$ ou non. Ainsi une relation binaire n'est rien d'autre qu'une application f de $E \times E$ dans $\{0, 1\}$, en convenant que si $a_i \,\mathcal{R}\, a_j$, alors $f(a_i, a_j) = 1$ et sinon $f(a_i, a_j) = 0$. (en général on présente une telle application sous la forme d'un tableau à double entrée et on parle de matrice de la relation binaire $\mathcal{R}$, compter des relations binaires c'est donc compter des tableaux).

Pour compter le nombre de relations antisymétriques il faut en plus veiller à respecter la contrainte précédente.

$\star$ Le fait que $\mathcal{R}$ soit antisymétrique n'impose rien sur le fait qu'un élément soit ou non en relation avec lui-même. Ainsi, pour chaque i de $[\![1, n]\!]$, on peut prendre $f(a_i, a_i) = 0$ ou $f(a_i, a_i) = 1$. Ce qui fait déjà 2^n façons de remplir la diagonale de la matrice de $\mathcal{R}$, toutes valides.

$\star$ Maintenant si $i \neq j$, on n'a pas le droit d'avoir $f(a_i, a_j) = 1$ et $f(a_j, a_i) = 1$, mais on peut avoir $[f(a_i, a_j) = 1$ et $f(a_j, a_i) = 0]$ ou $[f(a_i, a_j) = 0$ et $f(a_j, a_i) = 1]$ ou $[f(a_i, a_j) = 0$ et $f(a_j, a_i) = 0]$.

Pour ne pas remplir deux fois le tableau, on liste les couples (a_i, a_j) avec $i < j$ et à chaque fois que l'on a choisi un tel couple, il y a trois façons de remplir l'ensemble des deux cases (i, j) et (j, i). Comme il y a $\binom{n}{2}$ couples (a_i, a_j) avec $i < j$, il y a donc $3^{\binom{n}{2}}$ façons de remplir la partie de la matrice de $\mathcal{R}$ hors diagonale pour respecter la condition d'antisymétrie.

Quelle que soit la façon de remplir la diagonale, on a toutes les façons de remplir le reste du tableau, et donc :

$$\boxed{\text{Le nombre de relations binaires antisymétriques sur } E \text{ est } 2^n \times 3^{\binom{n}{2}} = 2^n \times 3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

[Vous pouvez procéder de même pour démontrer qu'il existe $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ relations binaires sur E qui sont symétriques et $2^{n(n-1)}$ relations binaires sur E réflexives. En revanche le dénombrement des relations binaires transitives est un problème d'une toute autre nature...]

Corrigé 5.08

Il y a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments dans E et 2^n parties en tout ; la moyenne du nombre d'éléments d'une partie de E est donc $m = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$; en utilisant la relation $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, pour $k \geqslant 1$ on obtient :

$$m = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{2^n} \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} = \frac{n}{2^n} 2^{n-1}.$$

Soit :

$$\boxed{m = \frac{n}{2}}$$

[Ce résultat était prévisible par le fait que pour tout k, il y a autant de parties ayant k éléments que de parties en ayant $n - k$.]

La variance du nombre d'éléments est $v = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} - m^2$.

Or, si $n \geqslant 2$ et en appliquant deux fois la relation précédente :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} = n(n-1)2^{n-2}$$

Le résultat est encore vrai si $n = 1$, et donc :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

D'où : $v = n(n+1)2^{n-2}\frac{1}{2^n} - \frac{n^2}{4} = \frac{n}{4}$ et l'écart-type vaut : $\boxed{\sigma = \frac{\sqrt{n}}{2}}$

Par exemple, les parties d'un ensemble à 16 éléments possèdent en moyenne 8 éléments avec un écart-type de 2.

Corrigé 5.07

1°) Se donner une application φ de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$, c'est se donner le n -uplet $(\varphi(1),\ldots,\varphi(n))$ formé d'éléments de $[\![1,p]\!]$. Ainsi on peut confondre l'application φ avec l'élément de $[\![1,p]\!]^n$ associé et il existe p^n applications de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$.
Plus généralement il existe p^n applications d'un ensemble quelconque de cardinal p vers un ensemble quelconque de cardinal n.

2°) a) Par la remarque faite à la fin de la question précédente, on a :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \operatorname{Card} D_i = (p-1)^n$$

b) $D_i \cap D_j$ est formé des applications de $[\![1,n]\!]$ vers l'ensemble $[\![1,p]\!] \setminus \{i,j\}$, qui est de cardinal $p-2$, donc on a de même :

$$i \neq j \implies \operatorname{Card}(D_i \cap D_j) = (p-2)^n$$

c) Plus généralement si $i_1, i_2, \ldots, i_k$ sont k éléments deux à deux distincts de $[\![1,p]\!]$ (avec $1 \leqslant k < p$ et on peut supposer $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$), $D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_k}$ est formé des applications de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!] \setminus \{i_1,\ldots,i_k\}$ qui est de cardinal $p-k$, donc :

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant p \implies \operatorname{Card}(D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_k}) = (p-k)^n$$

3°) a) Une application surjective de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$ est une application qui atteint tous les éléments de $[\![1,p]\!]$. Ainsi, une application est surjective si et seulement si elle n'appartient à aucun D_i. Les autres, c'est-à-dire celles qui ne sont pas surjectives, appartiennent à au moins l'un des D_i. Comme il y a au total p^n applications de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$, par disjonction :

$$\boxed{p^n = S_n^p + \operatorname{Card}(D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n)}$$

b) La formule du crible de Poincaré s'écrit :

$$\operatorname{Card}(D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(D_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \operatorname{Card}(D_{i_1} \cap D_{i_2})$$
$$+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_2 \le n} \operatorname{Card}(D_{i_1} \cap D_{i_2} \cap D_{i_3}) - \cdots + (-1)^p \operatorname{Card}(D_1 \cap \ldots \cap D_p)$$

Chaque terme de la première somme est de cardinal $(p-1)^n$ et la première somme comporte $p = \binom{p}{1}$ termes. Chaque terme de la deuxième somme est de cardinal $(p-2)^n$ et la deuxième somme comporte $\binom{p}{2}$ termes ... Enfin chaque terme de la dernière somme est de cardinal $(p-p)^n = 0$ et la dernière somme comporte un seul terme, donc $\binom{p}{p}$ termes. Bref, la formule de Poincaré donne ici :

$$\operatorname{Card}(D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n) = \binom{p}{1}(p-1)^n - \binom{p}{2}(p-2)^n + \cdots + (-1)^p \binom{p}{p}(p-p)^n$$

Soit :

$$\operatorname{Card}(D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \binom{p}{k} (p-k)^n$$

et : $S_n^p = p^n - \operatorname{Card}(D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n) = p^n + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n$, soit :

$$S_m^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^m$$

Corrigé 5.09

1°) Se donner une application f strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$, c'est se donner son image $f([\![1,p]\!])$ qui est une partie de $[\![1,n]\!]$ de cardinal p.
En effet :
→ si f est strictement croissante, elle est injective et son image est bien de cardinal p.
→ Réciproquement si on se donne une partie de $[\![1,n]\!]$ de cardinal p, on peut énoncer cette partie dans l'ordre de ses éléments $i_1,\ldots,i_p$, avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ et la seule application strictement croissante ayant cette image est définie par $f(1) = i_1, f(2) = i_2, \ldots, f(p) = i_p$.
Ainsi il y a autant d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$ que de parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal p, et le cardinal cherché est :

$$\boxed{\binom{n}{p}}$$

2°) ⋆ Si f est croissante de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$, alors f' est à valeurs entières et :

$$f'(k+1) - f'(k) = f(k+1) + k - f(k) - (k-1) = f(k+1) - f(k) + 1 \geqslant 1 > 0$$

et f' est strictement croissante, telle que $f'(1) = f(1) \geqslant 1$ et $f'(p) = f(p) + p - 1 \leqslant n + p - 1$. Donc f' est strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1, n+p-1]\!]$.

$\star$ Réciproquement soit f' strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1, n+p-1]\!]$, f' ne peut être l'image par φ que de l'application f définie par :

$$f(1) = f'(1),\ f(2) = f'(2) - 1, \ldots, f(k) = f'(k) - k + 1,\ f(p) = f'(p) - p + 1$$

Or cette application vérifie :

$f(1) \geqslant 1$, $f(p) \leqslant n + p - 1 - p + 1 = n$ et $f(k+1) - f(k) = f'(k+1) - f'(k) - 1 \geqslant 0$ (puisque $f'(k+1) - f'(k) \geqslant 1$, par stricte croissance de la fonction f qui est à valeurs entières)

Donc l'application f convient, ce qui prouve que φ est une bijection de l'ensemble des applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$ sur l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1, n+p-1]\!]$ et le cardinal cherché est :

$$\boxed{\binom{n+p-1}{p}}$$

Corrigé 5.10

On peut supposer sans perdre de généralité que $E = [\![1, n+3]\!]$ et $F = [\![1,n]\!]$.

1°) Pour fabriquer une surjection f adéquate, on doit :

$\rightarrow$ Choisir 4 éléments $\{i, j, k, \ell\}$ dans E, ce qui peut se faire de $\binom{n+3}{4}$ façons, puis choisir l'élément m de F image par f de ces 4 éléments, ce qui peut se faire de n façons.

$\rightarrow$ Une fois ceci fait, et quelle que soit la façon de le faire, il reste alors à définir les images des éléments de $E' = E \setminus \{i, j, k, \ell\}$ de façon à construire une surjection de E sur F. Comme $f(E) = f(E') \cup \{m\}$, il faut donc avoir $F' = (F \setminus \{m\}) \subset f(E')$, donc en fait $f(E') = F'$, puisque ces deux ensembles ont le même cardinal $n-1$. On construit ainsi une bijection de E' sur F', ce qui peut se faire de $(n-1)!$ façons.

Par conséquent le nombre d'applications convenant vaut $N_1 = \binom{n+3}{4} \times n \times (n-1)!$, soit :

$$\boxed{N_1 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4!} \times n \times (n-1)! = \frac{n(n+3)!}{24}}$$

2°) On raisonne de même. Pour fabriquer une surjection f adéquate, on doit :

$\rightarrow$ Choisir 3 éléments $\{i, j, k\}$ dans E et un élément m dans F image par f de ces trois éléments, ce qui peut se faire de $\binom{n+3}{3} \times n$ façons.

$\rightarrow$ Une fois ceci fait, et quelle que soit la façon de le faire, on choisit 2 éléments $\{u, v\}$ dans $E \setminus \{i, j, k\}$ et un élément p dans $F \setminus \{m\}$ qui sera l'image par f de ces deux éléments, ce qui peut se faire de $\binom{n}{2} \times (n-1)$ façons.

$\rightarrow$ Enfin, il reste à définir, à chaque fois, les images par f des éléments de $E' = E \setminus \{i, j, k, u, v\}$ de façon à fabriquer une surjection de E sur F. Comme précédemment, il s'agit donc de compléter avec une bijection de E' sur $F \setminus \{m, p\}$. Il existe $(n-2)!$ applications de ce type et ainsi le nombre d'applications convenant vaut $N_2 = \binom{n+3}{3} \times n \times \binom{n}{2} \times (n-1) \times (n-2)!$, soit :

$$\boxed{N_2 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} \times \frac{n(n-1)}{2} \times n! = \frac{n(n-1)(n+3)!}{12}}$$

3°) E a trois éléments de plus que F, ainsi lorsque l'on considère une surjection de E sur F, il existe i, j, k dans E tels que f soit une bijection de $E \setminus \{i, j, k\}$ sur F et alors :

- soit i, j, k ont la même image et on a une surjection du type de la première question ;
- soit deux éléments parmi i, j, k ont la même image et le dernier a une image différente et on a une surjection du type de la deuxième question ;
- soit les trois éléments ont des images toutes différentes et f est une surjection telle qu'il existe trois éléments de F ayant chacun deux antécédents.

Il reste donc à dénombrer les surjections du troisième type ! Il faut alors faire attention à ne pas compter ces applications plusieurs fois ...

→ On choisit 3 éléments parmi les n éléments de F. Ceci peut se faire de $\binom{n}{3}$ façons et on peut les noter u, v, w avec $u < v < w$.

→ Quelle que soit la façon de faire ce premier tri, on choisit les deux antécédents de u de $\binom{n+3}{2}$ façons, **puis** les deux antécédents de v de $\binom{n+1}{2}$ façons, **puis** les deux antécédents de w de $\binom{n-1}{2}$ façons. (passer un instant à se convaincre que le fait de prendre $u < v < w$ permet de ne pas compter deux fois la même chose).

→ Il reste alors à finir la construction à l'aide d'une bijection de E privé de 6 éléments sur F privé de 3 éléments, ce qui peut se faire de $(n-3)!$ façons.

Le nombre d'applications convenant est donc $N_3 = \binom{n}{3}\binom{n+3}{2}\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{2} \times (n-3)!$, soit :

$$N_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times \frac{(n+3)(n+2)}{2} \times \frac{(n+1)n}{2} \times \frac{(n-1)(n-2)}{2} \times (n-3)!$$

$$\boxed{N_3 = \frac{n(n-1)(n-2)(n+3)!}{48}}$$

Les différents cas étudiés formant une partition des cas possibles, si N désigne le nombre total de surjerctions de E sur F, on a :

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = \frac{(n+3)!}{48}(2n + 4n(n-1) + n(n-1)(n-2) = \frac{(n+3)!}{48}(n^3 + n^2)$$

$$\boxed{N = \frac{n^2(n+1)(n+3)!}{48}}$$

Corrigé 5.06

Notons k le cardinal de A, avec $1 \leqslant k \leqslant n$, et N le nombre de couples convenant.
→ On choisit d'abord l'élément « a » commun à A et B de n façons.
→ Ceci étant fait, pour construire A de cardinal k il reste à choisir $k-1$ éléments parmi les $n-1$ éléments de $E \setminus \{a\}$, ce qui peut se faire de $\binom{n-1}{k-1}$ façons.
→ Ceci étant fait, B est constitué de $\{a\}$ et d'une partie quelconque de $E \setminus A$ qui est de cardinal $n-k$ (ainsi seul a est commun à A et B), il y a donc 2^{n-k} façons de choisir alors B.
Il y a donc $2^{n-k}\binom{n-1}{k-1}$ couples convenant tels que Card $A = k$.

On obtient donc : $N = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 2^{n-k} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^{(n-1)-k} = n\, 3^{n-1}$

Corrigé 5.11

Notons $A_1A_2\dots A_n$ un polygone convexe à n sommets (numérotés par exemple dans l'ordre trigonométrique) et $c(i)$ la couleur choisie pour colorier le côté $[A_i, A_{i+1}]$, $c(n)$ désignant la couleur du côté $[A_n, A_1]$.

1°) ⋆ Dans le cas d'un triangle $A_1A_2A_3$, un coloriage adéquat peut se représenter par le triplet $(c(1), c(2), c(3))$ avec $[c(2) \neq c(1)]$ et $[c(3) \neq c(1), c(3) \neq c(2)]$. On a donc c façons de choisir

$c(1)$ puis, à chaque fois, $c-1$ façons de choisir $c(2)$ et enfin, à chaque fois, $c-2$ façons de choisir $c(3)$. Ainsi :

$$\boxed{N_c(3) = c(c-1)(c-2)}$$

⋆ Pour un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$, un bon coloriage se représente donc par un quadruplet $(c(1), c(2), c(3), c(4))$ tel que $c(2) \neq c(1)$ (on a donc c façons de choisir $c(1)$ et $c-1$ façons de choisir $c(2)$), la couleur $c(3)$ peut alors se choisir de $c-1$ façons ($c(3) \neq c(2)$) mais $c(4)$ doit être différent de $c(3)$ et de $c(1)$, il nous faut donc distinguer deux cas selon que $c(1)$ est égal ou non à $c(3)$.

→ Si $c(3) = c(1)$ (on a donc un seul choix pour $c(3)$!), on peut choisir $c(4)$ de $c-1$ façons.
Il y a donc $c(c-1)\times 1\times(c-1) = c(c-1)^2$ bons coloriages de ce type.

→ Si $c(3) \neq c(1)$ (il y a donc $c-2$ façons de choisir $c(3)$, puisque $c(3)$ est aussi différent de $c(1)$), alors on peut choisir $c(4)$ de $c-2$ façons (les couleurs $c(1)$ et $c(3)$ sont interdites).
Il y a donc $c(c-1)(c-2)(c-2) = c(c-1)(c-2)^2$ bons coloriages.

$$\boxed{N_c(4) = c(c-1)^2 + c(c-1)(c-2)^2}$$

2°) Pour $n \geqslant 4$, la démarche est exactement la même et il nous faut donc distinguer les coloriages pour lesquels $c(n-1) \neq c(1)$ (type 1), et ceux pour lesquels $c(n-1) = c(1)$ (type 2).

→ Les bons coloriages de type 1 sont donc les n-uplets $(c(1), \dots, c(n-1), c(n))$ tels que $(c(1), \dots, c(n-1))$ est en fait un bon coloriage du polygone $A_1A_2\dots A_{n-1}$ et on peut compléter en donnant à $c(n)$ n'importe quelle couleur différente de $c(1)$ et $c(n-1)$, ce qui fait $c-2$ choix.
Les bons coloriages de type 1 sont donc au nombre de $N_c(n-1)\times(c-2)$.

→ Les bons coloriages de type 2 sont les n-uplets tels que $(c(1), \dots, c(n-2))$ est en fait un bon coloriage du polygone $A_1A_2\dots A_{n-2}$, que l'on complète avec $c(n-1) = c(1)$ un seul choix !) et en choisissant $c(n)$ différent de $c(1)$, ce qui fait $c-1$ choix.
Les bons coloriages de type 2 sont donc au nombre de $N_c(n-2)\times(c-1)$.

Ces deux cas sont les seuls possibles et s'excluent mutuellement, donc :

$$\boxed{N_c(n) = (c-2)N_c(n-1) + (c-1)N_c(n-2)}$$

3°) Posons : $u_n = (c-1)^n + (-1)^n(c-1)$. On a :
⋆ $u_2 = (c-1)^2 + (c-1) = c(c-1) = N_c(2)$
⋆ $u_3 = (c-1)^3 - (c-1) = (c-1)((c-1)^2 - 1) = c(c-1)(c-2) = N_c(3)$
La formule est donc valide pour $n=2$ et $n=3$.
⋆ Supposons la formule vraie jusqu'à un certain rang $n-1$, avec $n \geqslant 3$, alors :

$$\begin{aligned}
N_c(n) &= (c-2)N_c(n-1) + (c-1)N_c(n-2)\\
&= (c-2)((c-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(c-1)) + (c-1)((c-1)^{n-2} + (-1)^{n-2}(c-1))\\
&= (c-2)(c-1)^{n-1} - (-1)^n(c-2)(c-1) + (c-1)^{n-1} + (-1)^n(c-1)^2\\
&= (c-1)^{n-1}(c-2+1) + (-1)^n(c-1)((c-1)-(c-2))\\
&= (c-1)^n + (-1)^n(c-1) = u_n
\end{aligned}$$

La formule est donc valide jusqu'au rang n. On conclut par le principe de récurrence.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, N_c(n) = (c-1)^n + (-1)^n(c-1)}$$

(a) La probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de k lancers est $(5/6)^k$. Il s'agit donc ici de trouver le plus petit k pour lequel $(5/6)^k \leq 1/2$. On obtient $k = 4$.

(b) On veut $(35/36)^k < 1/2$ et on obtient $k = 25$.

Notons A_i l'événement « une boule blanche est obtenue lors du i-ème tirage ». Les événements A_i sont mutuellement indépendants et $\mathrm{P}(A_i) = p$ pour tout i.

(a) Notons B_n l'événement « la première boule blanche apparaît lors du n-ième tirage ».
On peut écrire

$$B_n = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n.$$

Par indépendance, on obtient

$$\mathrm{P}(B_n) = (1-p)^{n-1}p.$$

(b) Notons C_{n-1} l'événement « $k-1$ boules sont apparues lors des $n-1$ premiers tirages »
et D_n l'événement « la k-ième boule blanche tirée apparaît lors du n-ième tirage ».
On a $D_n = C_{n-1} \cap A_n$ et

$$\mathrm{P}(C_{n-1}) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

car il s'agit de la probabilité d'obtenir $k-1$ succès dans la répétition indépendante d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
Par indépendance, on conclut

$$\mathrm{P}(D_n) = \mathrm{P}(C_{n-1} \cap A_n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(a) Pour chaque tirage faisant apparaître les nombres a, b, c dans le bon ordre, il y en a 5 autres où ces mêmes nombres apparaissent dans le désordre. La probabilité recherchée est donc égale à $1/6$.

(b) Un tirage s'apparente à une fonction de $[\![1;3]\!]$ vers $[\![1;10]\!]$. Il y a 10^3 fonctions toutes équiprobables. Parmi celles-ci, on recherche les fonctions strictement croissantes. Celles-ci sont simplement déterminées par les 3 valeurs distinctes qu'elles prennent qu'il suffit ensuite d'ordonner. Déterminer ces trois valeurs revient à choisir 3 éléments dans un ensemble à 10 éléments, il y a $\binom{10}{3}$ possibilités. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{10}{3}}{10^3} = \frac{12}{100}.$$

(c) Il s'agit maintenant de dénombrer les fonctions croissantes de $[\![1;3]\!]$ vers $[\![1;10]\!]$. À une telle fonction f, on peut associer la fonction $g \colon [\![1;3]\!] \to [\![1;12]\!]$ déterminée par

$$g(1) = f(1), g(2) = f(2) + 1 \text{ et } g(3) = f(3) + 2.$$

La fonction f étant croissante, la fonction g est strictement croissante. Inversement, à une fonction g strictement croissante de $[\![1;3]\!]$ vers $[\![1;12]\!]$ correspond une unique fonction f croissante de $[\![1;3]\!]$ vers $[\![1;10]\!]$. Il y a donc autant de fonctions croissantes de $[\![1;3]\!]$ vers $[\![1;10]\!]$ que de fonctions strictement croissantes de $[\![1;3]\!]$ vers $[\![1;12]\!]$ à savoir $\binom{12}{3}$. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{12}{3}}{10^3} = \frac{22}{100}.$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons que toute partie d'un ensemble à n éléments est finie.
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.
Soit E un ensemble fini a $n+1$ éléments.

$$E = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$$

avec des x_i deux à deux distincts.
Posons

$$E' = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

On a $\text{Card } E' = n$.
Soit A une partie de E.
Si $x_{n+1} \notin A$ alors A est une partie de E' et elle donc finie par hypothèse de récurrence.
Si $x_{n+1} \in A$. Posons $A' = A \setminus \{x_{n+1}\}$. A' est une partie de E' et donc, par hypothèse de récurrence, A' est finie. Puisque $A = A' \cup \{x_{n+1}\}$, l'ensemble A est réunion de deux ensembles finis disjoints et c'est donc une partie finie.
Récurrence établie

E est la réunion des deux parties A et $C_E A$ qui sont disjointes et finies.
On en déduit

$$\text{Card } A + \text{Card } C_E A = \text{Card } E$$

Puisque $\text{Card } C_E A \geq 0$, on obtient $\text{Card } A \leq \text{Card } E$ avec égalité si, et seulement si, $\text{Card } C_E A = 0$ i.e. $C_E A = \emptyset$ ce qui correspond au cas où $A = E$.

Posons $n = \text{Card } E$.
Si $n = 0$ alors $E = \emptyset$ et $f(E) = \emptyset$: ok
Si $n \neq 0$, écrivons $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec des x_i deux à deux distincts.
On a $f(E) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ et donc $f(E)$ est un ensemble fini avec $\text{Card } f(E) \leq n$.
Si de plus f est injective, les $f(x_i)$ sont deux à deux distincts et donc $\text{Card } f(E) = n$.

Supposons qu'il existe une injection f de E dans F. L'ensemble $f(E)$ est une partie de F donc

$$\operatorname{Card} f(E) \leq \operatorname{Card} F$$

Or f est injective donc

$$\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} E$$

et donc

$$\operatorname{Card} E \leq \operatorname{Card} F$$

Supposons maintenant qu'il existe une surjection f de E dans F. L'ensemble $f(E)$ n'est alors autre que F et la propriété

$$\operatorname{Card} f(E) \leq \operatorname{Card} E$$

donne directement

$$\operatorname{Card} F \leq \operatorname{Card} E$$

Enfin, s'il existe une bijection f de E vers F, c'est une injection et une surjection !

(i) $\Rightarrow$ (ii) est entendue.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons $f : E \to F$ injective.
On a $f(E) \subset F$ et $\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ donc $f(E) = F$.
Par suite, l'application f est surjective.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Supposons $f : E \to F$ surjective.
Par l'absurde, si f n'est pas injective alors il existe $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$.
On a alors $f(E \setminus \{x\}) = f(E) = F$ car f est surjective et $f(x') = f(x)$.
Or $\operatorname{Card} f(E \setminus \{x\}) < \operatorname{Card} E$ d'où $\operatorname{Card} F < \operatorname{Card} E$. C'est absurde.

Par récurrence sur $p \geq 0$.
Cas $p = 0$: il existe un arrangement de 0 élément de E correspondant à l'arrangement vide...
Cas $p = 1$: un arrangement d'un élément de E correspond au choix de cet élément et la propriété est immédiate. Supposons la propriété vraie au rang $p \geq 0$.
Notons $A_{p+1}(E)$ l'ensemble des arrangements de $p+1$ éléments de E.
Soit x un élément de E et notons $A^x_{p+1}(E)$ l'ensemble des arrangements $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1})$ d'éléments de E se terminant par x i.e. tels que $x_{p+1} = x$.
Considérons enfin la fonction f qui associe à celui-ci l'arrangement réduit $(x_1, \ldots, x_p)$.
L'application f réalise une bijection de $A^x_{p+1}(E)$ vers $A_p(E \setminus \{x\})$ ensemble des arrangements de p éléments de $E \setminus \{x\}$. Par hypothèse de récurrence, on peut donc affirmer qu'il y a exactement

$$(n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

arrangements de $p+1$ éléments de E se terminant par x.
Puisque l'ensemble des arrangements $p+1$ éléments de E est la réunion disjointe des ensembles $A^x_{p+1}(E)$ pour x parcourant E, on obtient

$$\text{Card}\, A_{p+1}(E) = \sum_{x \in E} \text{Card}\, A^x_{p+1}(E) = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Récurrence établie.

Cas $p = 0$: l'ensemble E est vide et alors il n'y a qu'une seule application au départ de E (qu'on appelle l'application vide...) et celle-ci est injective. La propriété énoncée est alors vraie.
Cas $p \neq 0$: on peut écrire $E = \{x_1, \ldots, x_p\}$ avec les x_i deux à deux distincts.
Considérons alors l'application qui à une injection f de E dans F associe l'échantillon $(f(x_1), \ldots, f(x_p))$. Cette application réalise une bijection de l'ensemble des injections de E dans F vers l'ensemble des arrangements de p éléments de F.

Notons $A_p(E)$ l'ensemble des arrangements de p éléments de E et $C_p(E)$ l'ensemble des combinaisons de p éléments de E. On peut définir une application $f : A_p(E) \to C_p(E)$ en associant à chaque arrangement $(x_1, \ldots, x_p)$ la combinaison $\{x_1, \ldots, x_p\}$. Pour une combinaison $\{x_1, \ldots, x_p\}$ donnée, les arrangements qui lui correspondent par f sont obtenus à partir de $(x_1, \ldots, x_p)$ et de ses permutations. Il y a donc exactement $p!$ arrangements associés à la combinaison $\{x_1, \ldots, x_p\}$. Puisque $A_p(E)$ est la réunion disjointe des ensembles des arrangements ainsi déterminés, on obtient

$$\text{Card}\, A_p(E) = \text{Card}\, C_p(E) \times p!$$

puis

$$\text{Card}\, C_p(E) = \frac{1}{p!} \frac{n!}{(n-p)!} = \binom{n}{p}$$