1. C'est immédiat grâce à la symétrie du produit scalaire.

2. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$, de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$q(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\langle e_i,e_j\rangle$. On en déduit :

$q(x)=\left\langle \sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}x_je_j\right\rangle$, par bilinéarité du produit scalaire.

Finalement, on a : $q(x)=\langle x,x\rangle=\|x\|^2$. Pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{R}^n$, on a : $\|x\|^2>0$.
Ainsi, pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{R}^n$, on a : $q(x)>0$.

Commençons par remarquer que si A est vide, alors A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Supposons donc que A n'est pas vide et considérons un élément a de A. Cet élément a appartient à l'intersection de tous les A_i, il appartient donc à chacun d'eux. Or, quel que soit l'entier i de $[\![1,k]\!]$, A_i est ouvert, donc il existe un réel r_i strictement positif tel que la boule ouverte $B(a, r_i)$ soit incluse dans A_i. Notons alors r le plus petit des r_i. Puisque c'est le plus petit, alors la boule ouverte $B(a, r)$ est incluse dans chaque A_i, quel que soit l'entier i de $[\![1,k]\!]$, c'est-à-dire qu'elle est incluse dans leur intersection, c'est-à-dire dans A. Nous venons d'établir qu'en chaque point a de A, il existe une boule ouverte de centre a, incluse dans A : cela montre que A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. En notant $x=(x_1,\dots,x_n)$, on a $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_ix_j$. La fonction f est donc polynomiale, ce qui justifie que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit un entier k de $[\![1,n]\!]$. Pour dériver partiellement par rapport à x_k, nous allons commencer par réorganiser l'expression de $f(x)$ en faisant apparaître les termes contenant la variable x_k.

On a, sans difficulté, pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

$$f(x)=a_{k,k}x_k^2+x_k\underbrace{\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_{k,j}x_j}_{\text{ne dépend pas de } x_k}+x_k\underbrace{\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}a_{i,k}x_i}_{\text{ne dépend pas de } x_k}+\underbrace{\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_{i,j}x_ix_j}_{\text{ne dépend pas de } x_k}$$

On a donc : $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)=2a_{k,k}x_k+\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_{k,j}x_j+\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}a_{i,k}x_i$, soit, en incorporant un $a_{k,k}x_k$ à la première somme, et l'autre à la seconde : $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)=\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}x_j+\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}x_i$. Mais A est symétrique donc les deux sommes sont égales et on obtient : $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)=2\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}x_i$.

Remarque. On vient de montrer que, si $f(x)={}^tXAX$, alors $\nabla f(x)=2AX$.

1. a) Fixons un élément $u=(u_1,\dots,u_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. La fonction g est donc définie sur $]0,+\infty[$ par $g(t)=f(tu)=f(tu_1,\dots,tu_n)$, c'est-à-dire qu'elle est de la forme $t\mapsto f(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))$ où, pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, $\varphi_i : t\mapsto tu_i$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, alors d'après le **théorème 7.13**, g est dérivable sur $]0,+\infty[$. En outre, pour tout réel t strictement positif, on a : $g'(t)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i'(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))=\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(tu_1,\dots,tu_n)$.

b) Par hypothèse sur la fonction f, pour tout u de $\mathbb{R}^n$ et pour tout réel t strictement positif, on a : $f(tu)=t^\alpha f(u)$. En dérivant membre à membre par rapport à t, et en tenant compte de la question **1.a)**, on obtient pour tout réel t strictement positif : $\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(tu_1,\dots,tu_n)=\alpha t^{\alpha-1}f(u)$.

En évaluant cette égalité pour $t=1$, on trouve, pour tout u de $\mathbb{R}^n$: $\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)=\alpha f(u)$.

2. a) La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme différence de telles fonctions, et en utilisant les résultats obtenus précédemment, pour tout réel strictement positif t, on a :

$$h'(t)=\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(tu)-\alpha t^{\alpha-1}f(u)=\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(tu)-\frac{\alpha}{t}t^\alpha f(u)=\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}tu_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(tu)-\frac{\alpha}{t}t^\alpha f(u)$$

Or, on a pour tout u de $\mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)=\alpha f(u)$. En l'écrivant pour $tu=(tu_1,\dots,tu_n)$ à la place de $u=(u_1,\dots,u_n)$, on a alors $\sum_{i=1}^{n}tu_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(tu)=\alpha f(tu)$. Il reste à terminer l'enchaînement :

$$h'(t)=\frac{1}{t}\alpha f(tu)-\frac{\alpha}{t}t^\alpha f(u)=\frac{\alpha}{t}\left(f(tu)-t^\alpha f(u)\right)=\frac{\alpha}{t}h(t)$$

b) La fonction $\psi : t\mapsto\frac{h(t)}{t^\alpha}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout réel t de $]0,+\infty[$, on a :

$$\psi'(t)=\frac{h'(t)t^\alpha-h(t)\alpha t^{\alpha-1}}{(t^\alpha)^2}=\frac{h'(t)-\frac{\alpha}{t}h(t)}{t^\alpha}=\frac{0}{t^\alpha}=0$$

La dérivée de ψ étant nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$, on en déduit que ψ est constante sur $]0,+\infty[$. En particulier, pour tout réel t de $]0,+\infty[$, on a $h(t)=h(1)$, c'est-à-dire : $f(tu)-t^\alpha f(u)=f(u)-f(u)=0$. On a donc : $f(tu)=t^\alpha f(u)$.
C'est vrai pour tout réel t de $]0,+\infty[$ et tout élément u de $\mathbb{R}^n$, donc h est homogène de degré α.

c) Des questions **1.b** et **2.b**, on déduit que f est homogène de degré α si, et seulement si, pour tout élément u de $\mathbb{R}^n$, on a : $\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)=\alpha f(u)$.

1. F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. On a sans problème, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=x+2y+2xy^2 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2x+y+2x^2y.$$

Les points critiques de F sont les solutions du système $\begin{cases} x+2y+2xy^2=0 \ (L_1) \\ 2x+y+2x^2y=0 \ (L_2) \end{cases}$. De $(L_1)-(L_2)$, on tire $-x+y+2xy(y-x)=0$, soit $(y-x)(1+2xy)=0$, d'où : $y-x=0$ ou $1+2xy=0$.

- Cas $y-x=0$, c'est-à-dire $y=x$. En reportant dans (L_1) on a $3x+2x^3=0$, ou encore $x(3+2x^2)=0$, d'où $x=0$ (car $3+2x^2\neq 0$). Par suite $y=0$ et $(0,0)$ est un point critique de F.
- Cas $1+2xy=0$, soit $2xy=-1$. En reportant dans (L_1) on a $x+2y-y=0$, ou encore $y=-x$.

Mais puisque $2xy=-1$, alors $-2x^2=-1$, c'est-à-dire que $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (et $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$) ou $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (et $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$). $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sont donc les deux autres points critiques de F.

Bilan : F admet trois points critiques : $A=(0,0)$, $B=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $C=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. F étant de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, si elle admet un extremum, c'est en un point critique, c'est-à-dire en l'un des trois points A, B et C. Il reste donc à tester chacun de ces trois points.
La fonction F étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiale), on peut utiliser les notations de Monge. Déterminons au préalable les dérivées partielles secondes de f. Pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on a : $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)=1+2y^2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x,y)=2+4xy$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)=1+2x^2$.

- Test de A. On note $r=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(A)=1$, $s=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(A)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(A)=2$ et $t=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(A)=1$.

$rt-s^2=1\times 1-2^2=-3$, donc $rt-s^2<0$: F n'a pas d'extremum en A (A est un point selle).

- Test de B. On note $r=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(B)=2$, $s=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(B)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(B)=0$ et $t=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(B)=2$.

$rt-s^2=2\times 2-0^2=4$, donc $rt-s^2>0$: on peut d'ores et déjà dire que f a un extremum local en B. Comme en outre $r>0$, alors c'est un minimum local.

• Test de C. On note $r = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(C) = 2$, $s = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(C) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(C) = 0$ et $t = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(C) = 2$.

On trouve les mêmes valeurs de r, s et t que dans le cas de B, on a donc la même conclusion : f présente un minimum local en C.

• Bilan : la fonction F présente deux extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$, l'un en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, l'autre en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, et chacun de ces extremums est un minimum local.

On a en outre $F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = F\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - 4 \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Remarque. On peut montrer que ce minimum est global, puisque, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on a

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{4} + xy + x^2y^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \left(\frac{1}{2} + xy\right)^2 + F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Par suite, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on a : $F(x,y) \geq F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1. On a sans peine : $\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial A}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2y + 12xy^2 + 4y^3 = 0 \\ 4x^3 + 12x^2y + 12xy^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 0 & (L_1) \\ x^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 0 & (L_2) \end{cases}$.

De $(L_1) - (L_2)$, on tire : $x^3 - y^3 = 0$, soit $x^3 = y^3$, d'où $x = y$ car la fonction *cube* est bijective.
En reportant par exemple dans (L_1), il vient : $7x^3 = 0$, d'où $x = 0$, et par suite $y = 0$.
Bilan : le système proposé admet une solution et une seule : $(0,0)$.

2. a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $A(x,x) = 14x^4$ et $A(x,-x) = -2x^4$. Ainsi : $A(x,x) > 0$ et $A(x,-x) < 0$.

b) Commençons par remarquer que, A étant de classe C^1 (car polynomiale) sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, si elle présente un extremum, c'est nécessairement en un point critique, c'est-à-dire en $(0,0)$.
Or $A(0,0) = 0$ et nous avons vu que, pour tout réel x non nul, $A(x,x) > 0$ et $A(x,-x) < 0$, c'est-à-dire que pour tout réel x non nul, $A(x,x) > A(0,0)$ et $A(x,-x) < A(0,0)$.
La fonction A ne peut pas admettre de maximum en $(0,0)$, sinon il existerait une boule ouverte B de centre $(0,0)$ telle que, pour tout point (x, y) de B, on ait $A(x,y) \leq A(0,0)$, c'est-à-dire $A(x,y) \leq 0$. Or, la boule ouverte B de centre $(0,0)$ contient des points de la forme (x,x) en lesquels $A(x,x) > 0$, d'où la contradiction cherchée.

On contredit de même l'existence d'un minimum pour A grâce à la présence de points de la forme $(x,-x)$ dans toute boule ouverte de centre $(0,0)$.

Remarque. Pour montrer l'existence de points de la forme (x,x) et $(x,-x)$ dans toute boule ouverte B de centre $(0,0)$. de rayon $r>0$, on écrit que $\left\|\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)\right\|=\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2}=\frac{r}{\sqrt{2}}<r$, donc $\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}\right)\in B$. On montre de même que $\left(\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)\in B$.

1. La fonction $(a,b)\mapsto\frac{1}{b^n}$ est de classe C^1 sur $]0,A[\times]0,+\infty[$ (inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas). La fonction $(a,b)\mapsto-\frac{1}{b}(-na+S)$ également, en tant que quotient bien défini de polynômes, et la fonction *exp* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $(a,b)\mapsto e^{-\frac{1}{b}(-na+S)}$ est de classe C^1 sur $]0,A[\times]0,+\infty[$, d'après les règles de composition des fonctions de classe C^1.
Finalement, L_n est de classe C^1 sur l'ouvert $]0,A[\times]0,+\infty[$ comme produit de telles fonctions.
On en déduit que, si L_n admet un extremum sur cet ouvert, c'est nécessairement en un point critique, c'est-à-dire un point (a,b) de $]0,A[\times]0,+\infty[$ tel que $\frac{\partial L_n}{\partial a}(a,b)=\frac{\partial L_n}{\partial b}(a,b)=0$.

Or, pour tout (a,b) de $]0,A[\times]0,+\infty[$, $\frac{\partial L_n}{\partial a}(a,b)=\frac{1}{b^n}\times\frac{n}{b}e^{-\frac{1}{b}(-na+S)}$, donc $\frac{\partial L_n}{\partial a}(a,b)\neq 0$. Ceci montre bien que L_n n'admet pas d'extremum sur $]0,A[\times]0,+\infty[$.

2. Considérons un réel a de $[0,A[$ et un réel b de $]0,+\infty[$.
On a alors $a<A$, d'où $-\frac{1}{b}(-na+S)<-\frac{1}{b}(-nA+S)$ car n et b sont strictement positifs.

La fonction *exp* étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a alors $e^{-\frac{1}{b}(-na+S)}<e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}$, puis : $\frac{1}{b^n}e^{-\frac{1}{b}(-na+S)}<\frac{1}{b^n}e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}$, car, encore une fois, b est strictement positif, c'est-à-dire finalement : $L_n(a,b)<L_n(A,b)$.

Pour tout réel a appartenant à $]A,+\infty[$, ceci s'écrit $0<\frac{1}{b^n}e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}$, ce qui est encore vrai.

3. La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout réel b de $]0,+\infty[$, on a :
$$g'(b)=-\frac{n}{b^{n+1}}e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}+\frac{1}{b^n}\left(\frac{-nA+S}{b^2}\right)e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}=\frac{-nb-nA+S}{b^{n+2}}e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}.$$

$g'(b)$ est donc du signe de $-nb-nA+S$ (strictement positif avant $-A+S/n$ et strictement négatif après). Puisque $S>nA$, alors $-A+S/n>0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $]0,-A+S/n]$ et strictement décroissante sur $[-A+S/n,+\infty[$, ce qui montre que g admet un maximum global sur $]0,+\infty[$, atteint en l'unique point $b_0=-A+S/n$.

4. Soit un couple (a,b) différent de (A,b_0). On a donc $a\neq A$ ou bien $b\neq b_0$.
Si $a\neq A$, alors d'après la question **2.** on a $L_n(a,b)<L_n(A,b)$ et d'après la question **3.**, quel que soit le b choisi, $L_n(A,b)\leq L_n(A,b_0)$. On en déduit que $L_n(a,b)<L_n(A,b_0)$.
Si $b\neq b_0$, alors d'après la question **2.** on a $L_n(a,b)\leq L_n(A,b)$ et d'après la question **3.**, on a $L_n(A,b)<L_n(A,b_0)$ (c'est ici que l'on a utilisé $b\neq b_0$). On a donc encore $L_n(a,b)<L_n(A,b_0)$.
Finalement, on a : $\forall(a,b)\in[0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $(a,b)\neq(A,b_0)$, $L_n(a,b)<L_n(A,b_0)$. Ceci montre que L_n admet sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ un maximum global atteint en l'unique point $(A,-A+S/n)$.

1. La fonction f est polynomiale donc elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2. Les points critiques de f sont les solutions (x,y,z) du système $\nabla f(x,y,z)=(0,0,0)$.
Or, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, on a :
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x^2-z+2$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z-y$. On a alors :

$$\nabla f(x,y,z)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}2xy=0 & (L_1)\\ x^2-z+2=0 & (L_2)\\ 2z-y=0 & (L_3)\end{cases}.$$

De (L_1) déduit : $x=0$ ou $y=0$.
Cas $x=0$. Dans ce cas, (L_2) donne $z=2$ et par suite, (L_3) donne $y=4$.
Cas $y=0$. Dans ce cas, (L_3) donne $z=0$ et (L_2) est impossible car elle s'écrit $x^2+2=0$.
Finalement, le système n'a qu'une solution, le triplet $(0,4,2)$, et f a un unique point critique, le point $A=(0,4,2)$.

2. a) Déterminons les dérivées partielles secondes de f en A.
Pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, on a : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)=2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z)=-1$, et enfin $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=2$, d'où, évaluées en $A=(0,4,2)$ et placée là où il faut : $\nabla^2 f(A)=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&0&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$.

b) Deux possibilités s'offrent à nous : l'étude des valeurs propres de $\nabla^2 f(A)$ ou l'étude de la forme quadratique associée à $\nabla^2 f(A)$. La forme de $\nabla^2 f(A)$ fait préférer la première méthode.

$$\nabla^2 f(A) - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 8-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 8-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & -1-2\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - \lambda L_2$$

Le trinôme $\lambda^2 - 2\lambda - 1$ possède deux racines : $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. Les valeurs propres de $\nabla^2 f(A)$ sont donc 8, $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. $\nabla^2 f(A)$ possède une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative ($1-\sqrt{2}<0$), donc *f* ne présente pas d'extremum en *A* (*A* est un point selle).

1. La fonction *f* est polynomiale, elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en tout point de $\mathbb{R}^3$. Pour répondre à la question, il suffit de vérifier que $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{\partial f}{\partial y}(A) = \frac{\partial f}{\partial z}(A) = 0$.

Or, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 8\big(y(xz-y)(zy-x) + (yx-z)z(zy-x) - (yx-z)(xz-y)\big).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 8\big(x(xz-y)(zy-x) - (yx-z)(zy-x) + (yx-z)(xz-y)z\big).$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 8\big(-(xz-y)(zy-x) + (yx-z)x(zy-x) + (yx-z)(xz-y)y\big).$$

On vérifie alors sans peine que $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0$.

Bilan : $A = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ est un point critique de *f*.

2. a) Pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 16\big(yz(zy-x) - y(xz-y) - (yx-z)z\big), \text{ donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 3.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = 8(4xz^2y - 3zx^2 - 3zy^2 + 4yx - z - z^3), \text{ donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = -1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 8(-3z^2y + 4xz - y + 4y^2xz - 3yx^2 - y^3), \text{ donc } \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(A) = -1.$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=16(-x(zy-x)+x(xz-y)z-(yx-z)z)$, donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)=3$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z)=8(4zy-x-3xz^2+4yzx^2-x^3-3y^2x)$, donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(A)=-1$.

Et enfin $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=16(-x(zy-x)-y(xz-y)+(yx-z)xy)$, donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A)=3$.

D'où la matrice hessienne de f en A : $\nabla^2 f(A)=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) De l'expression de $\nabla^2 f(A)$, on déduit la forme quadratique associée q_A :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ q_A(x,y,z)=3x^2+3y^2+3z^2-2xy-2xz-2yz.$$

c) Pour tout triplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, on a : $3\left(x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z\right)^2+\frac{8}{3}\left(y-\frac{1}{2}z\right)^2+2z^2$

$$=3x^2+\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{3}z^2-2xy-2xz+\frac{2}{3}yz+\frac{8}{3}y^2+\frac{2}{3}z^2-\frac{8}{3}yz+2z^2$$
$$=3x^2+3y^2+3z^2-2xy-2xz-2yz.$$

On en déduit que, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, $q_A(x,y,z)=3\left(x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z\right)^2+\frac{8}{3}\left(y-\frac{1}{2}z\right)^2+2z^2$,

et par suite (comme somme de carrés de réels), pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, $q_A(x,y,z)\geq 0$.
Cela ne suffit pas à conclure : il faut vérifier que : $q_A(x,y,z)=0 \Leftrightarrow (x,y,z)=(0,0,0)$.

$$q_A(x,y,z)=0 \Leftrightarrow 3\left(x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z\right)^2+\frac{8}{3}\left(y-\frac{1}{2}z\right)^2+2z^2=0$$

Une somme de termes positives est nulle si, et seulement si, chacun de ses termes est nul.

On a donc : $q_A(x,y,z)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z\right)^2=0 \\ \frac{8}{3}\left(y-\frac{1}{2}z\right)^2=0 \\ 2z^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z=0 \\ y-\frac{1}{2}z=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

On a ainsi établi que pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, on a $q_A(x,y,z)>0$. Ceci prouve que f présente un minimum local en A.

3. On pouvait aussi étudier le signe des valeurs propres de $\nabla^2 f(A)=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$. C'était même ici plus rapide si l'on remarque que $\nabla^2 f(A)=4I_3-J$, où J est la matrice dont chaque coefficient vaut 1. On a vu que les valeurs propres de J sont 0 et 3. On en déduit que celle de $\nabla^2 f(A)$ sont 4 et 1. Toutes les valeurs propres de $\nabla^2 f(A)$ étant strictement positives, on retrouve le fait que f présente un minimum local en A.

1. a) La fonction f est de classe C^1 (et même C^2) sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$ comme somme de quotients bien définis de polynômes. Elle admet donc des dérivées d'ordre 1 et 2 en tout points de $(\mathbb{R}_+^*)^3$.

$\forall\,(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\dfrac{1}{y}-\dfrac{z}{x^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{z}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-\dfrac{y}{z^2}+\dfrac{1}{x}$.

On a donc : $$\nabla f(x,y,z)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{y}-\dfrac{z}{x^2}=0\\[2mm] -\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{z}=0\\[2mm] -\dfrac{y}{z^2}+\dfrac{1}{x}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-yz=0 & (L_1)\\ -xz+y^2=0 & (L_2)\\ -yx+z^2=0 & (L_3)\end{cases}.$$

De $(L_1)-(L_2)$, on tire $x^2-y^2-yz+xz=0$, soit $(x-y)(x+y)+z(x-y)=0$, ou encore $(x-y)(x+y+z)=0$. Mais, (x,y,z) appartient à $(\mathbb{R}_+^*)^3$, donc $x+y+z>0$. Il reste donc comme seule alternative $x-y=0$, soit : $y=x$. En remplaçant y par x dans (L_1), on trouve $x^2-xz=0$, soit $x(x-z)=0$, soit encore $z=x$ car $x\neq 0$. Finalement, les solutions de ce système sont les couples (x,y,z) de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ tels que $x=y=z$.

Bilan : f possède une infinité de points critiques, ce sont les points de la forme $A_a=(a,a,a)$, où a est un réel strictement positif quelconque.

b) $\nabla^2 f(A_a)$ est déterminée par les valeurs des dérivées partielles secondes de f en (a,a,a).

Or, pour tout (x,y,z) de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=\frac{2z}{x^3},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)=-\frac{1}{y^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z)=-\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=\frac{2x}{y^3},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z)=-\frac{1}{z^2}\ \text{et}\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=\frac{2y}{z^3}.$$

En remplaçant x, y et z par a, et en disposant comme il se doit, on obtient :

$$\nabla^2 f(A_a) = \begin{pmatrix} 2/a^2 & -1/a^2 & -1/a^2 \\ -1/a^2 & 2/a^2 & -1/a^2 \\ -1/a^2 & -1/a^2 & 2/a^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{C'est la matrice } M \text{ demandée}}.$$

en utilisant la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1, on a : $M = 3I_3 - J$. Les valeurs propres de J étant égales à 0 et 3, celles de M sont alors 3 et 0. On en déduit celles de $\nabla^2 f(A_a)$: 0 et $3/a^2$.

c) Les valeurs propres de $\nabla^2 f(A_a)$ sont toutes du même signe mais l'une est nulle, on ne peut donc rien conclure quant à l'existence d'un extremum local de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$.

2. a) Pour un couple (x, y) fixé dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$, considérons la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(z) = \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$. La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout z de $]0,+\infty[$, on a :

$g'(z) = \frac{z^2 - xy}{z^2 x} = \frac{(z-\sqrt{xy})(z+\sqrt{xy})}{z^2 x}$, qui est du signe de $z - \sqrt{xy}$: $\begin{cases} g'(z) \le 0 \text{ si } z \le \sqrt{xy} \\ g'(z) \ge 0 \text{ si } z \ge \sqrt{xy} \end{cases}$.

g est donc décroissante sur $]0, \sqrt{xy}]$ et croissante sur $[\sqrt{xy}, +\infty[$, elle admet donc un minimum absolu en $\sqrt{xy}$; pour tout réel z de $]0,+\infty[$, on a ainsi $g(z) \ge g\left(\sqrt{xy}\right)$, c'est-à-dire :

$\frac{y}{z} + \frac{z}{x} \ge \frac{y}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{xy}}{x}$, soit encore $\frac{y}{z} + \frac{z}{x} \ge 2\sqrt{\frac{y}{x}}$. En ajoutant $\frac{x}{y}$ de chaque côté, on montre bien que, pour tout réel z strictement positif, on a : $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \ge \frac{x}{y} + 2\sqrt{\frac{y}{x}}$.

b) Notons h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(t) = t + \frac{2}{\sqrt{t}}$. h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout réel t de $]0,+\infty[$, on a : $h'(t) = 1 - \frac{1}{t^{3/2}} = \frac{t^{3/2}-1}{t^{3/2}}$, qui est du signe de $t^{3/2} - 1$. Or, la fonction $t \mapsto t^{3/2} - 1$ est croissante sur $]0,+\infty[$ et s'annule en 1, donc : $\begin{cases} h'(t) \le 0 \text{ si } t \le 1 \\ h'(t) \ge 0 \text{ si } t \ge 1 \end{cases}$.

La fonction h est donc décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$, par conséquent elle admet un minimum absolu en 1 : pour tout réel t de $]0,+\infty[$, on a $h(t) \ge h(1)$, soit $t + \frac{2}{\sqrt{t}} \ge 3$.

Pour $t = \frac{x}{y}$, cette inégalité s'écrit $\frac{x}{y} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} \ge 3$. C'est bien ce qu'il fallait montrer.

c) Pour tout triplet (x,y,z) de $(\mathbb{R}_+^*)^3$, on a ainsi les inégalités suivantes : $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq\frac{x}{y}+2\sqrt{\frac{y}{x}}\geq 3$, c'est-à-dire : $f(x,y,z)\geq f(a,a,a)$, pour tout réel a de $]0,+\infty[$. On vient d'établir que f présente en chacun de ses points critiques un minimum global, égal à 3.

1. φ étant un produit scalaire, on a, pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$, c'est-à-dire ${}^tXAY={}^tYAX$ (égalité vraie, elle, pour tous vecteurs colonnes X et Y de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). En particulier, pour tout couple d'entiers (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ on a : ${}^tE_iAE_j={}^tE_jAE_i$, où E_k est le vecteur colonne dont la $k^{\text{ème}}$ composante est un 1 et les autres sont nulles. L'égalité s'écrit, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$: $a_{i,j}=a_{j,i}$, ce qui montre que A est symétrique. Puisqu'elle est en outre à coefficients réels, alors elle est diagonalisable et possède des valeurs propres. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. On a alors $AX=\lambda X$ et, en multipliant à gauche par ${}^tX$, on obtient : ${}^tXAX=\lambda\,{}^tXX$, soit $\varphi(x,x)=\lambda\|x\|^2$ (on a noté $\|\ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$). Comme $x\neq 0$ et comme φ est un produit scalaire, alors $\|x\|^2>0$ et $\varphi(x,x)>0$, d'où : $\lambda=\frac{\varphi(x,x)}{\|x\|^2}>0$. Bilan : A est symétrique et les valeurs propres de A sont strictement positives.

2. a) En notant $x=(x_1,\dots,x_n)$, on a : $f(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_ix_j-\sum_{i=1}^{n}b_ix_i$. La fonction f est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Ses points critiques sont les x de $\mathbb{R}^n$ tels que $\nabla f(x)=0$. Or, pour tout entier k de $[\![1,n]\!]$ et tout $x=(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$f(x)=\frac{1}{2}\Big(a_{k,k}x_k^2+x_k\underbrace{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}a_{k,j}x_j}_{\text{ne dépend pas de }x_k}+x_k\underbrace{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}a_{i,k}x_i}_{\text{ne dépend pas de }x_k}+\underbrace{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}a_{i,j}x_ix_j}_{\text{ne dépend pas de }x_k}\Big)-\sum_{i=1}^{n}b_ix_i$$

On a donc : $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)=\frac{1}{2}\Big(2a_{k,k}x_k+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}a_{k,j}x_j+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}a_{i,k}x_i\Big)-b_k$, soit, en incorporant un $a_{k,k}x_k$ à la première somme, et l'autre à la seconde : $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)=\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}x_j+\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}x_i\Big)-b_k$. Mais A est symétrique, donc les deux sommes sont égales : $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)=\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}x_j-b_k$. On a ainsi :

$\nabla f(x)=0 \Leftrightarrow \forall k\in[\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j - b_k = 0$. Or $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j$ est la $k^{\text{ème}}$ composante du produit matriciel AX et b_k est la $k^{\text{ème}}$ composante de B, donc : $\nabla f(x)=0 \Leftrightarrow AX-B=0$. Il reste à rappeler que A n'a pas de valeur propre nulle (elles sont toutes strictement positives), donc elle est inversible, et $AX-B=0 \Leftrightarrow X=A^{-1}B$.

Bilan : f possède un unique point critique, le point x_0 associé à $X_0=A^{-1}B$.

b) La fonction f étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ (car polynomiale), on étudie sa matrice hessienne en X_0. En rebaptisant les indices, on a vu que pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k - b_i$. En dérivant partiellement par rapport à x_j, j étant un entier de $[\![1,n]\!]$, on en déduit sans peine que pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, on a : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)=a_{i,j}$, c'est-à-dire finalement que la matrice hessienne de f en tout point x de $\mathbb{R}^n$ n'est autre que A : $\nabla^2 f(x)=A$. En particulier, $\nabla^2 f(x_0)=A$ Or, on a déjà vu que les valeurs propres de A sont toutes strictement positives, donc f présente un minimum local en x_0.

1. a) La fonction f est polynomiale, elle est donc de classe C^1 (et même C^2) sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ qui est un ouvert (produit cartésien d'ouverts de $\mathbb{R}$). Si elle possède un extremum, c'est nécessairement en un point critique, c'est-à-dire un point (b,n) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifiant $\nabla f(b,n)=(0,0)$. Or, pour tout (b,n) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a : $\frac{\partial f}{\partial b}(b,n)=120-16b+4n$ et $\frac{\partial f}{\partial n}(b,n)=4b-4n$, donc :

$$\nabla f(b,n)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases}120-16b+4n=0\\ 4b-4n=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}120-12n=0\\ b=n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n=10\\ b=10\end{cases}$$

La fonction f a donc un unique point critique : le point $A=(10,10)$.

Pour tout point (b,n) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(b,n)=-16,\ \frac{\partial^2 f}{\partial b\partial n}(b,n)=\frac{\partial^2 f}{\partial n\partial b}(b,n)=4 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}(b,n)=-4$$

On note $r=\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(10,10)=-16$, $s=\frac{\partial^2 f}{\partial b\partial n}(10,10)=\frac{\partial^2 f}{\partial n\partial b}(10,10)=4$ et $t=\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}(10,10)=-4$.

$rt-s^2=-16\times(-4)-4^2=64-16=48$, donc $rt-s^2>0$ et ainsi f présente un extremum local en A. Comme en outre $r<0$, alors c'est un maximum local, qui vaut $f(10,10)=600$.

b) $2(n-b)^2+6(b-10)^2=2n^2+8b^2-4nb-120b+600=600-f(b,n)=f(10,10)-f(b,n)$.

Par suite, $f(10,10)-f(b,n)\geq 0$, c'est-à-dire $f(b,n)\leq f(10,10)$. Ceci étant vrai pour tout (b,n) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$, alors f présente un maximum global en $A=(10,10)$.

2. Le mieux ici est d'exprimer la contrainte sous la forme $b=23-2n$, où $0<n<23/2$. Le problème devient alors de déterminer le maximum de la fonction $n\mapsto f(23-2n,n)$ sur l'intervalle $]0,23/2[$. Notons g cette fonction. Pour tout réel n de $]0,23/2[$, on a :

$$g(n)=f(23-2n,n)=120(23-2n)-8(23-2n)^2+4n(23-2n)-2n^2=-42n^2+588n-1472.$$

g est un trinôme de coefficient dominant négatif, il admet donc un maximum en $-\frac{588}{2\times(-42)}=7$ qui appartient à $]0,23/2[$. La valeur de b correspondante est $b=23-2\times 7=9$. L'optimum du rendement sous la contrainte de budget imposée est donc réalisé pour $b=9$ et $n=7$.

1. La fonction f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[^3$ car somme d'inverses de fonctions polynomiales qui ne s'annulent pas sur $]0,+\infty[^3$.

On a sans problème, pour tout $x=(x_1,x_2,x_3)$ de $]0,+\infty[^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)=-\frac{1}{4x_1^2},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)=-\frac{1}{x_2^2}\ \text{ et }\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)=-\frac{1}{9x_3^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x)=\frac{1}{2x_1^3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x)=\frac{2}{x_2^3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x)=\frac{2}{9x_3^3}\ \text{ et, si } i\neq j,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)=0$$

2. Pour tout point $A=(a_1,a_2,a_3)$ de $]0,+\infty[^3$, on a $\nabla^2 f(A)=\begin{pmatrix} 1/2a_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/a_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/9a_3^3 \end{pmatrix}$, donc pour toute colonne H à trois lignes, non nulle, en notant h_1,h_2 et h_3 les composantes de H, on a ${}^tH\nabla^2 f(A)H=\frac{1}{2a_1^3}h_1^2+\frac{2}{a_2^3}h_2^2+\frac{2}{9a_3^3}h_3^2$, d'où ${}^tH\nabla^2 f(A)H\geq 0$ car $(a_1,a_2,a_3)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$ De plus,

$${}^tH\nabla^2 f(A)H=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2a_1^3}h_1^2+\frac{2}{a_2^3}h_2^2+\frac{2}{9a_3^3}h_3^2=0 \underset{\left(\substack{\text{somme nulle de}\\ \text{termes positifs}}\right)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2a_1^3}h_1^2=\frac{2}{a_2^3}h_2^2=\frac{2}{9a_3^3}h_3^2=0$$

$$\Leftrightarrow (h_1=h_2=h_3=0),\ \text{car } (a_1,a_2,a_3)\in(\mathbb{R}_+^*)^3.$$

Ceci montre que, pour toute colonne H à trois lignes, non nulle, on a : ${}^tH\nabla^2 f(A)H>0$.

3. La fonction f étant de classe C^1 sur l'ouvert $]0,+\infty[^3$ (produit cartésien d'ouverts de $\mathbb{R}$), si elle admet un extremum, c'est en un point critique, c'est-à-dire en un point x de $]0,+\infty[^3$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)=\frac{\partial f}{\partial x_3}(x)=0$. Comme les dérivées partielles d'ordre 1 de f ne s'annulent pas, f n'a pas de point critique et par suite, f n'a pas d'extremum sur $]0,+\infty[^3$.

4. Notons $\mathcal{H}$ le sous espace vectoriel des solutions du système linéaire homogène associé à celui de la contrainte $x_1+x_2+x_3=110$ (notée C), c'est-à-dire $x_1+x_2+x_3=0$.

$$x_1+x_2+x_3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=-x_2-x_1 \\ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \end{cases} : \mathcal{H}=\{(x_1,x_2,-x_1-x_2),(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$$

La fonction f est de classe C^1 sur l'ouvert $]0,+\infty[^3$, donc si f admet un extremum local sous la contrainte C, c'est en un point (x_1,x_2,x_3) tel que $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=110 \\ \nabla f(x_1,x_2,x_3)\perp\mathcal{H} \end{cases}$.

Or, $\nabla f(x_1,x_2,x_3)=\left(-\frac{1}{4x_1^2},-\frac{1}{x_2^2},-\frac{1}{9x_3^2}\right)$, d'où les équivalences qui suivent :

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=110 \\ \nabla f(x_1,x_2,x_3)\perp \mathrm{H} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=110 \\ \left(-\frac{1}{4x_1^2},-\frac{1}{x_2^2},-\frac{1}{9x_3^2}\right)\perp \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=110 \\ \left(-\frac{1}{4x_1^2},-\frac{1}{x_2^2},-\frac{1}{9x_3^2}\right)\perp(1,0,-1) \\ \left(-\frac{1}{4x_1^2},-\frac{1}{x_2^2},-\frac{1}{9x_3^2}\right)\perp(0,1,-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=110 \\ -\frac{1}{4x_1^2}+\frac{1}{9x_3^2}=0 \\ -\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{9x_3^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=110 \\ -9x_3^2+4x_1^2=0 \\ -9x_3^2+x_2^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=110 \\ (3x_3)^2=(2x_1)^2 \\ (3x_3)^2=x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=110 \\ 3x_3=2x_1 \ \text{(car } x_3 \text{ et } x_1 \text{ sont positifs)} \\ 3x_3=x_2 \ \text{(car } x_3 \text{ et } x_2 \text{ sont positifs)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=20 \\ x_1=30 \\ x_2=60 \end{cases}.$$

Ainsi, si f admet un extremum sous la contrainte C, c'est au point $B=(30,60,20)$. Il reste à savoir si, effectivement, f présente un extremum en B.

Pour appliquer l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre B et x, il faut s'assurer que le segment $[B,x]$ est inclus dans $]0,+\infty[^3$.

Soit donc un point x de $]0,+\infty[^3\cap C$.

Tout point du segment $[B,x]$ est de la forme $tB+(1-t)x$, où t est un réel de $[0,1]$. En notant $x=(x_1,x_2,x_3)$ on a : $tB+(1-t)x=(\underbrace{30t+(1-t)x_1}_{\substack{\text{positif car } x_1,\ t \text{ et}\\ 1-t \text{ sont positifs}}},\underbrace{60t+(1-t)x_2}_{\substack{\text{positif car } x_2,\ t \text{ et}\\ 1-t \text{ sont positifs}}},\underbrace{20t+(1-t)x_3}_{\substack{\text{positif car } x_3,\ t \text{ et}\\ 1-t \text{ sont positifs}}})$.

La fonction f étant de classe C^2 sur $]0,+\infty[^3$, on peut appliquer l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 : il existe un réel θ appartenant à $]0,1[$ tel que :

$$f(x)=f(B)+\langle\nabla f(B),\, x-B\rangle+\frac{1}{2}q_{B+\theta(x-B)}(x-B).$$

On a $x-B=(x_1-30,\, x_2-60,\, x_3-20)$, ce qui permet d'en déduire que :

$x_1-30+x_2-60+x_3-20=\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{=110 \text{ car } x=(x_1,x_2,x_3)\in C}-110=0$, donc $x-B\in\mathcal{H}$.

Mais on a choisi B de telle sorte que $\nabla f(B)\perp\mathcal{H}$, donc $\langle\nabla f(B),\, x-B\rangle=0$, et l'égalité de Taylor-Lagrange devient $f(x)-f(B)=\dfrac{1}{2}q_{B+\theta(x-B)}(x-B)$.

Enfin, d'après la question **2**, q_A est positive pour tout A de $]0,+\infty[^3$, donc en particulier pour $B+\theta(x-B)$, et par conséquent, on en déduit : $q_{B+\theta(x-B)}(x-B)\geq 0$.

On a montré ainsi que $f(x)-f(B)\geq 0$, et on l'a montré pour tout x de $]0,+\infty[^3\cap C$, d'où la conclusion :

La fonction f présente un minimum global sous la contrainte $x_1+x_2+x_3=110$, en $B=(30,60,20)$.