ANALYSE : Fonctions

Limites

- Limites usuelles
- Opérations sur les limites

Théorèmes :

Théorèmes de comparaison :

- $f(x) > g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(x) < g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème des gendarmes :

$$\begin{cases} f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$$

Croissance comparée :

Exponentielle :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

Logarithme :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$.

Solutions de $f(x) = k$

Existence - Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :

$\begin{cases} f \text{ continue sur } [a;b] \\ k \in \big[f(a); f(b)\big] \end{cases} \Rightarrow$ il existe **au moins** une solution sur $[a;b]$.

Compter les solutions - Corollaire du TVI :

$\begin{cases} f \text{ continue sur } [a;b] \\ k \in \big[f(a); f(b)\big] \\ f \text{ monotone sur } [a;b] \end{cases} \Rightarrow$ il existe **une unique** une solution sur $[a;b]$.

Variations

Calcul de dérivée :

- Dérivées usuelles.
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- $(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$.

- $f'(x) \geqslant 0$ sur $I \Rightarrow f$ croissante sur I
- $f'(x) \leqslant 0$ sur $I \Rightarrow f$ décroissante sur I

Convexité / Points d'inflexion

Dérivée seconde :

$f'' \longrightarrow$ dérivée de f'

Points d'inflexion :

$f''(x)$ s'annule en a en changeant de signe $\Rightarrow \big(a; f(a)\big)$ point d'inflexion

Convexité :

- $f''(x) \geqslant 0$ sur $I \Rightarrow f$ est convexe sur I.
- $f''(x) \leqslant 0$ sur $I \Rightarrow f$ est concave sur I.

Formulaire

Limites usuelles

- Si n est pair :
  - $\lim_{x\to+\infty} x^n = \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$
  - $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$
- Si n est impair :
  - $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$
  - $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$
- $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty.$

Limites : Formes Indéterminées

1. Factorisation par le terme de plus haut degré (en $+\infty$, factoriser dans l'ordre de priorité par e^x, x^n, $\ln(x)$).
2. En $\pm\infty$, la limite d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.
3. Théorèmes de croissance comparée pour e^x et $\ln(x)$:
   - $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
   - $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0.$
   - $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.$
   - $\lim_{x\to0^+} x^n \ln(x) = 0.$

Manipulation d'expressions avec e^x et $\ln(x)$

- $\ln(a\times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $(e^a)^n = e^{na}$

Calcul de dérivées

Dérivées usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Autres formules :

- $(u\circ v)' = v'\times(u'\circ v).$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}.$

Fonction	Dérivée
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$u^n,\ n\in\mathbb{N}$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$

ANALYSE : Suites

Récurrence

Démonstration par récurrence :

- Introduction : Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition « … »
- Initialisation : On montre que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie.
- Hérédité : On montre que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ pour tout $n \geqslant n_0$.
- Conclusion : « Donc, par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ »

Variations

1. Suite croissante : $u_{n+1} > u_n$
2. Suites décroissante : $u_{n+1} < u_n$

Limites

Calcul de limites :

- Limites usuelles + opérations sur les limites
- Gestion des FI :

1. Factorisation par le terme de plus haut degré
2. Théorème de comparaison
3. Théorème des gendarmes

Montrer qu'une suite est convergente :

Théorème de convergence monotone :

- Suite croissante majorée.
- Suite décroissante minorée.

Suites géométriques

Somme des termes consécutifs :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{(1-q)^{n-p+1}}{1-q}$$

Définition :

- Relation de récurrence :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

- Forme explicite :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Limites :

1. $0 < q < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
2. $q > 1$:
   (a) $u_0 > 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
   (b) $u_0 < 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Variations :

1. $q > 1$:
   (a) $u_0 > 0$: (u_n) croissante.
   (b) $u_0 < 0$: (u_n) décroissante.
2. $0 < q < 1$:
   (a) $u_0 > 0$: (u_n) décroissante.
   (b) $u_0 < 0$: (u_n) croissante.

Suites arithmétiques

Limites :

1. $r > 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
2. $r < 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
3. $r = 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.

Variations :

1. $r > 0$: (u_n) croissante.
2. $r < 0$: (u_n) décroissante.

Somme des termes consécutifs :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$$

Définition :

- Relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

- Forme explicite :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Formulaire

Limites usuelles

u_n	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
$\frac{1}{n}$	0
$\frac{1}{\sqrt{n}}$	0
$\frac{1}{n^k}$, $k\in\mathbb{N}^*$	0
q^n avec $-1<q<1$	0

u_n	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
n	$+\infty$
$\sqrt{n}$	$+\infty$
n^k, $k\in\mathbb{N}^*$	$+\infty$
q^n avec $q>1$	$+\infty$

Opérations sur les limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l\neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n)$	$l\times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	$l\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$0^{\pm}$	l	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{u_n}{v_n})$	$\frac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I	F.I

Théorèmes

1. Théorème de convergence monotone :
   (a) Toute suite croissante et majorée converge.
   (b) Toute suite décroissante et minorée converge.
2. Théorème de comparaison :
   (a) Si à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
   (b) Si à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. Théorème des gendarmes : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ et qu'à partir d'un certain rang $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

GÉOMÉTRIE

Vecteurs

Définition :

- Un vecteur a un sens, une direction, et une norme, notée $\|\vec{u}\|$.
- Dans un repère, les coordonnées indiquent le « déplacement » selon chaque axe.

Orthogonalité, colinéarité, coplanarité :

- Vecteurs orthogonaux $\rightarrow$ directions perpendiculaires.
- Vecteur colinéaires $\rightarrow$ même directioni.
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires : $\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2, \vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

Plans

Position relative de plans :

- Parallèles strictement/confondus
- Sécants selon une droite.

Définition :

- Trois points
- Un point + deux vecteurs directeurs
- Un point + un vecteur normal (équation cartésienne)

Position relative :

- Parallèles strictement/confondus
- Sécants selon un point.

Droites

Définition :

- Deux points
- Un point + un vecteur directeur (représentation paramétrique)

Position relative de droites :

- Coplanaires :
1. Parallèles strictement ou confondues
2. Sécantes selon un point
- Non coplanaires (droites non parallèles et non sécantes)

Orthogonalité et distances

Produit scalaire dans l'espace :

- Calcul $\rightarrow$ voir formulaire
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux ssi $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Distances :

- Calcul $\rightarrow$ voir formulaire
- La distance d'un point à une droite ou à un plan est la distance entre le point et son projeté orthogonal sur l'objet en question.

Formulaire

Produit scalaire : formules

1. Dans un repère orthonormé : soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x;y;z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x';y';z'\end{pmatrix}$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
3. Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$.
4. Formules de polarisation :
   (a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
   (b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
   (c) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Formules de base

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A\end{pmatrix}$
- Distance : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2 + (z_B-z_A)^2}$ (conséquence de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2$)

Représentations des droites/plans

- Équation cartésienne de plan :

$$ax + by + cz + d = 0$$

  où $\vec{n}\begin{pmatrix}a \\ b \\ c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan.

- Représentation paramétrique d'une droite :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

  où $\vec{u}\begin{pmatrix}a \\ b \\ c\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite, et A un point de celle-ci.

Base de l'espace

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants ssi :

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow a = b = c = 0$$

Trois vecteurs linéairement indépendants ne sont pas coplanaires et forment une base de l'espace.

PROBABILITÉS : Formulaire

Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment un partition de Ω, alors pour tout évènement B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Cas particulier : A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers et on a ainsi :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

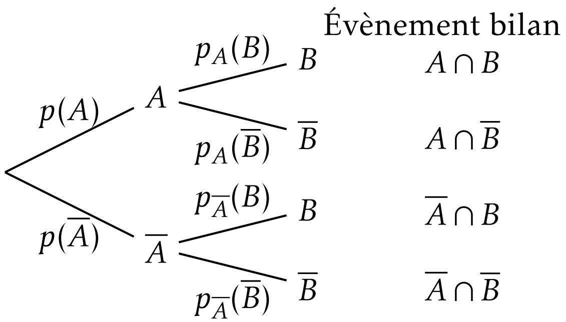
Probabilités conditionnelles

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ce qui est équivalent à :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Cette dernière formule revient à calculer la probabilité du premier chemin de l'arbre ci-dessous.



Variables aléatoires

- Loi de probabilités : donnée de la probabilité associée à chaque valeur prise par une variable aléatoire X.
- Espérance de X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i)$$

- Variance de X :

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

Loi binomiale

X variable aléatoire correspondant au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètre n et p, (répétition de n épreuves identiques et indépendantes).
On note $X \sim \mathcal{B}(n;p)$.

- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- $E(X) = np$
- $\text{Var}(X) = np(1-p)$

Pour s'en sortir dans tous les cas, il faut savoir avec la calculatrice calculer $P(X \leqslant k)$, $\binom{n}{k}$, et éventuellement $P(X = k)$ (cette dernière peut être calculée à la main si on sait retrouver $\binom{n}{k}$).