COURS COMPLET

Terminale

Spécialité Mathématiques

Simon Marseille

Cours complété

Table des matières

Table des matières

Table des matières

Rappel

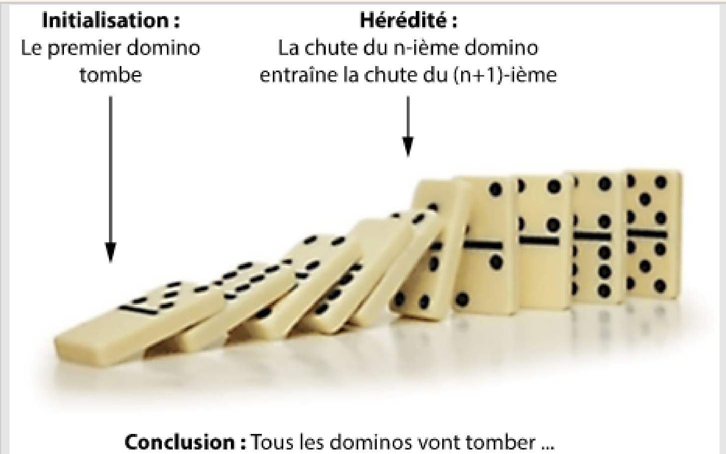
- Une suite (u_n) est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels.
- Une suite peut être définie :
  - de manière **explicite**.
    Ex : $u_n = 5n+1 \to u_0 = 5\times 0+1 = 1$, $u_1 = 5\times 1+1 = 6$, etc.
  - par la donnée d'un terme et d'une **relation de récurrence**.
    Ex : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases} \to u_1 = u_0+2 = 3$, $u_2 = u_1+2 = 5$, $u_3 = u_2+2 = 7$, etc.
- Suite croissante (resp. décroissante) : $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$).
- Il existe des suites particulières : les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Suite **arithmétique**	Suite **géométrique**
– $u_{n+1} = \boldsymbol{u_n + r}$	– $u_{n+1} = \boldsymbol{q \times u_n}$
– $u_n = \boldsymbol{u_p + (n-p)r}$. Cas particulier $p=0$: $u_n = \boldsymbol{u_0 + nr}$.	– $u_n = \boldsymbol{q^{n-p} u_p}$. Cas particulier $p=0$: $u_n = \boldsymbol{q^n u_0}$.
– $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = \underbrace{(n-p+1)}_{\text{nb de termes}} \times \frac{\overset{\text{1er terme}}{u_p}+\overset{\text{dernier}}{u_n}}{2}$	– $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = \underset{\text{1er terme}}{u_p} \times \frac{1-q^{\overbrace{n-p+1}^{\text{nb de termes}}}}{1-q}$

I. Raisonnement par récurrence

1) Définition

Introduction Le raisonnement par récurrence est un raisonnement qui permet de démontrer des propriétés dépendant d'entiers naturels. Il s'agit d'une méthode de démonstration très importante, que nous pourrons réutiliser à diverses occasions. Il existe une métaphore célèbre qui permet de comprendre facilement ce raisonnement.
L'image ci-dessous résume bien le principe :



C'est un raisonnement que l'on pourra employer pour répondre à des questions du type : "démontrer que pour tout entier naturel n..."

Définition 1.1 – Hérédité

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{P}_n$ une proposition définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.
Une proposition est **héréditaire** à partir du rang n_0 si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, "$\mathcal{P}_n$ est vraie" implique "$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie".

Théorème 1.1 – Raisonnement par récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}_n$ une proposition définie pour entier naturel $n \geq n_0$. $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ si :

1. $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = n_0$: **Initialisation** ;
2. $\mathcal{P}_n$ est **héréditaire** à partir du rang n_0.

Méthode Pour faire une démonstration par récurrence, il y a quelques étapes à respecter rigoureusement :

1. On énonce la proposition : "Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition « ... » "
2. On vérifie que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie (**initialisation**).
3. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain $n \geq n_0$ (**hypothèse de récurrence**).
4. On démontre qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   NB : les deux points précédents prouvent l'**hérédité** de la proposition.
5. On conclue que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 1.1 :

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ (i.e soit a un réel strictement positif).
Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

NB : Cette inégalité est appelée **inégalité de Bernoulli**. Nous en aurons l'usage plus tard. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $(1+a)^n \geq 1 + na$ ».
Initialisation : $(1+a)^0 = 1 = 1 + 2 \times 0$.
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Supposons qu'il existe un $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie, et montrons qu'alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n \times (1+a) \\
&\geq (1+na) \times (1+a) \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= 1 + a + na + na^2 \\
&= 1 + a(n+1) + na^2 \\
&\geq 1 + (n+1)a \quad (\text{car } na^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}_0$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 0, donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

II. Limite finie, limite infinie

Introduction Lorsque l'on s'intéresse à la limite d'une suite, on s'intéresse à ses termes lorsque n tend vers $+\infty$. Autrement dit, on va chercher à comprendre comment se comporte cette suite si n prend des valeurs infiniment grandes.

1) Limite finie d'une suite

a) Définition et premières propriétés

Définition 1.2 – Limite finie

Une suite (u_n) a pour limite le réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Formellement, (u_n) a pour limite l si :

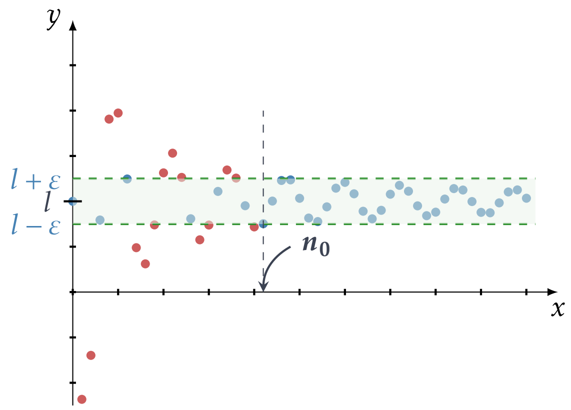
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \in]l-\varepsilon ; l+\varepsilon[.$$

On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

Illustration

Sur la figure ci-contre, on voit que les termes de la suite se concentrent de plus en plus autour de la limite l. Pour toute valeur de ε, on peut trouver un rang n_0 tel que tous les termes suivants soient dans l'intervalle $]l-\varepsilon ; l+\varepsilon[$.



Définition 1.3 – Convergence et divergence

On dit qu'une suite est **convergente** si elle a pour limite un nombre réel l.
On dit qu'une suite est **divergente** si elle n'est pas convergente.

Remarque(s) :

- Le symbole "$\forall$" signifie "pour tout".
- Le symbole "$\exists$" signifie "il existe au moins un".
- La phrase de la définition 1.2 se lit donc :

  « Pour tout epsilon strictement supérieur à 0, il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, u_n appartient à l'intervalle ouvert $]l-\varepsilon ; l+\varepsilon[$. »

  On voit à quel point le formalisme mathématique peut simplifier les écritures !

Exemple 1.2 :

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 - \frac{1}{n}$.
Démontrer que (u_n) converge vers 3.

Soit $\varepsilon > 0$ un réel.

$$\begin{aligned}3-\varepsilon < u_n < 3+\varepsilon &\Leftrightarrow 3-\varepsilon < 3-\frac{1}{n} < 3+\varepsilon \\ &\Leftrightarrow -\varepsilon < -\frac{1}{n} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \left|-\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}\end{aligned}$$

La dernière étape se justifier par le fait que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
Ainsi en prenant n_0 le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, on a $u_n \in]3-\varepsilon;3+\varepsilon[$ pour tout $n \geq n_0$.
Donc (u_n) converge vers 3.

b) Théorème de convergence monotone

Définition 1.4 – Suite majorée, suite minorée

- Un réel M est un **majorant** de (u_n) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n \leq M}$.
  On dit alors que (u_n) est **majorée**.
- Un réel m est un **minorant** de (u_n) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n \geq m}$.
  On dit alors que (u_n) est **minorée**.

Remarque(s) :

- On dit d'une suite majorée **et** minorée qu'elle est **bornée**.

Théorème 1.2 – Théorème de convergence monotone

- Une suite croissante et majorée converge.
- Une suite décroissante et minorée converge.

Exemple 1.3 :

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$.

1. Démontrer que (u_n) est croissante.
   Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $u_{n+1} > u_n$ »
   - Initialisation : $u_1 = \frac{1}{3} \times u_0 + 2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$.
     Ainsi, $u_1 > u_0$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- Hérédité : Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

$$\begin{aligned} u_{(n+1)+1} &= u_{n+2} \\ &= \frac{1}{3}u_{n+1} + 2 \\ &\geq \frac{1}{3}u_n + 2 \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\mathcal{P}_0$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 0. Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

2. Démontrer que (u_n) est majorée par 3.
   Soit $\mathcal{P}'_n$ la proposition : « $u_n \leq 3$ »
   - Initialisation : $u_0 = 2 < 3$.
     Donc $\mathcal{P}'_0$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}'_n$ soit vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n + 2 \\ &\leq \frac{1}{3} \times 3 + 2 \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= 3 \end{aligned}$$

     Donc $\mathcal{P}'_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : $\mathcal{P}'_0$ est vraie et $\mathcal{P}'_n$ est héréditaire à partir du rang 0. Donc $\mathcal{P}'_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
3. Que peut-on en déduire ?
   (u_n) est croissante et majorée par 3, donc d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Soit l la limite de (u_n). $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty} u_n + 2 &\Leftrightarrow l = \frac{1}{3}l + 2 \\ &\Leftrightarrow l - \frac{1}{3}l = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}l = 2 \\ &\Leftrightarrow l = 2 \times \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow l = 3 \end{aligned}$$

   Donc (u_n) converge vers 3.

2) Limite infinie d'une suite

Définition 1.5 – Limite infinie

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Formellement, (u_n) a pour limite $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$$

On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}_-^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq A$$

Propriété 1.1

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty$.

Exemple 1.4 :

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -2n + 5$.
Démontrer que (u_n) a pour limite $-\infty$.
Soit $A \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u_n \leq A &\Leftrightarrow -2n + 5 \leq A \\ &\Leftrightarrow -2n \leq A - 5 \\ &\Leftrightarrow n \geq -\frac{A}{2} + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant n_0 le plus petit entier strictement supérieur à $-\frac{A}{2} + \frac{5}{2}$, on a bien $u_n \leq A$ pour tout $n \geq n_0$.

Propriété 1.2

- Si (u_n) est croissante et non majorée, alors (u_n) a pour limite $+\infty$.
- Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors (u_n) a pour limite $-\infty$.

Démonstration

Démontrons le premier point de la propriété 1.2.
Soit (u_n) une suite croissante non majorée.
Soit A un réel.
(u_n) n'est pas majorée, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geq A$.
De plus, (u_n) est croissante, donc pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ et par extension $u_n \geq A$.
On a donc trouvé un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. $\square$

I. Cardinal d'un ensemble

1) Principe additif

Définition 2.1 – Cardinal

Soit A un ensemble fini.
Le **cardinal** de A, noté $\mathbf{Card}(A)$, est le nombre d'éléments de A.

Exemple 2.1 :

Déterminer le cardinal des ensembles $A = \{10; 20; 50\}$ et $B = \{0\}$.
$\text{Card}(A) = 3$ et $\text{Card}(B) = 1$.

Définition 2.2 – Ensembles disjoints

Soient A et B deux ensembles.
A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

Propriété 2.1 – Principe additif

Soient A_1, A_2,..., A_n des ensembles finis deux à deux disjoints, avec n entier naturel supérieur ou égal à 2. On a :

$$\begin{aligned}\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= \mathbf{Card}(A_1) + \mathbf{Card}(A_2) + \ldots + \mathbf{Card}(A_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Card}(A_k) \quad \text{(notation plus précise et concise)}\end{aligned}$$

Exemple 2.2 :

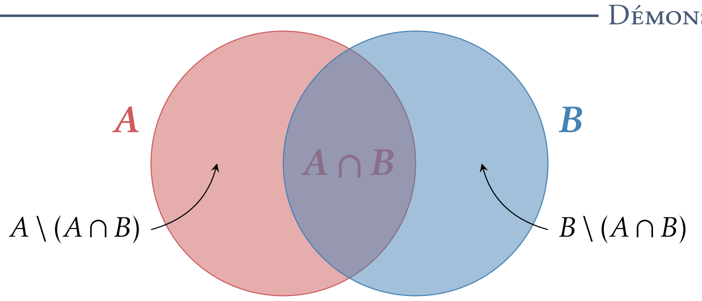
Soient A et B deux ensembles tels que $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{4; 5; 6\}$.
Quel est le cardinal de $A \cup B$?
$A \cap B = \emptyset$, donc A et B sont disjoints.
Donc $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 3 + 3 = 6$.
On voit facilement que $A \cup B$ contient bien 6 éléments puisque $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \}$.

Propriété 2.2 – Cardinal d'une réunion d'ensembles

Soient A et B deux ensembles finis.

$$\text{Card}(A \cup B) = \mathbf{Card}(A) + \mathbf{Card}(B) - \mathbf{Card}(A \cap B)$$

Démonstration



On voit aisément que :

$$A \cup B = (A - A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (B - A \cap B)$$

Or $A \setminus A \cap B$, $A \cap B$ et $B \setminus A \cap B$ sont disjoints.
On a ainsi :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\big(A \setminus (A \cap B)\big) + \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}\big(B \setminus (A \cap B)\big)$$

A et $A \cap B$ d'une part, et B et $A \cap B$ d'autre part étant disjoints, on a finalement :

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B) &= \text{Card}(A) - \cancel{\text{Card}(A \cap B)} + \cancel{\text{Card}(A \cap B)} + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \\ &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \end{aligned}$$

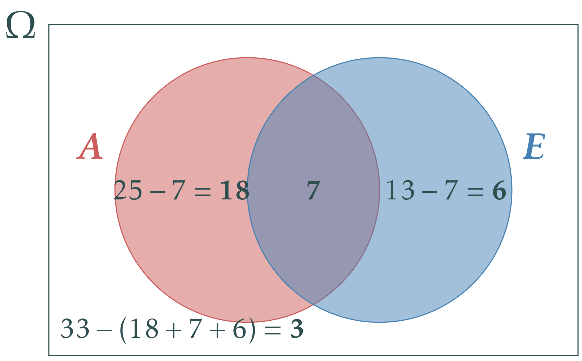
□

Remarque(s) :

- Le diagramme précédent s'appelle un diagramme de Venn, pratique pour représenter des données en théorie des ensembles.

Exemple 2.3 :

Dans une classe de 33 élèves, 25 étudient l'anglais, 13 l'espagnol, et 7 l'anglais et l'espagnol.
Combien d'élèves n'étudient ni l'anglais ni l'espagnol ?
Notons Ω l'ensemble des élèves de la classe.
Notons E l'ensemble des élèves qui étudient l'espagnol, et A l'ensemble des élèves qui étudient l'anglais.
D'après l'énoncé, on a $\text{Card}(E) = 13$, $\text{Card}(A) = 25$ et $\text{Card}(A \cap E) = 7$.
On en déduit que $\text{Card}(E \cup A) = \text{Card}(A) + \text{Card}(E) - \text{Card}(A \cap E) = 25 + 13 - 7 = 31$.
$33 - 31 = 2$. Donc seulement 2 élèves n'étudient ni l'anglais ni l'espagnol.
On peut vérifier à l'aide d'un diagramme de Venn :



2) Produit cartésien et principe multiplicatif

Définition 2.3 – Produit cartésien

Soient A et B deux ensembles non vides.
Le **produit cartésien** de A et B, noté $\boldsymbol{A \times B}$, est l'ensemble des **couples** $(a;b)$, avec $a \in A$ et $b \in B$, ce que l'on peut noter :

$$A \times B = \big\{(a;b) | a \in A, b \in B\big\}$$

Le produit cartésien $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois}}$, se note aussi $\boldsymbol{A^n}$, et ses éléments sont appelés $\boldsymbol{n}$ **– uplets**.

Exemple 2.4 :

Soient $A = \{1;2\}$ et $B = \{1;2;3\}$ deux ensembles.
Quels sont les éléments de $A \times B$?

$$A \times B = \Big\{(1;2);(1;2);(1;3);(2;1);(2;2);(2;3)\Big\}$$

Propriété 2.3 – Principe multiplicatif

Soient A et B deux ensembles finis.
Alors :

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathbf{Card}(\boldsymbol{A}) \times \mathbf{Card}(\boldsymbol{B})$$

Démonstration

Supposons $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $F = \{b_1, \ldots, b_p\}$. Alors on peut lister

$$\begin{array}{rclll} E \times F & = & \{ & (a_1,b_1),(a_1,b_2),\ldots,(a_1,b_p) & p \text{ couples} \\ & & & (a_2,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_2,b_p) & p \text{ couples} \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & (a_n,b_1),(a_n,b_2),\ldots,(a_n,b_p) \quad \} & p \text{ couples} \end{array}$$

Il y a donc n fois p-couples, ce qui fait bien np couples. □

Exemple 2.5 :

En reprenant l'exemple 2.4, on voit bien que $\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)$ $(6 = 2 \times 3)$.

Propriété 2.4

Soient A un ensemble non vide et n un entier naturel non nul.

$$\mathrm{Card}\left(A^n\right) = \left[\mathbf{Card}(\boldsymbol{A})\right]^{\boldsymbol{n}}$$

Démonstration

Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $\mathrm{Card}(A^n) = \left[\mathrm{Card}(A)\right]^n$ ».

- <u>Initialisation</u> : $\mathrm{Card}(A^1) = \mathrm{Card}(A) = \left[\mathrm{Card}(A)\right]^1$.
  Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- <u>Hérédité</u> : Supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(A^{n+1}) &= \mathrm{Card}(A^n \times A) \\ &= \mathrm{Card}(A^n) \times \mathrm{Card}(A) \quad \text{(propriété 2.3)} \\ &= \mathrm{Card}(A)^n \times \mathrm{Card}(A) \quad \text{(hyp. de récurrence)} \\ &= \mathrm{Card}(A)^{n+1} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\mathcal{P}_1$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 1.
  Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

□

Exemple 2.6 :

Combien de nombres à 6 chiffres choisis parmi 1, 2 et 3 existe-t-il ?
On cherche le cardinal de l'ensemble E^6 avec $E = \{1;2;3\}$.
On a : $\text{Card}(E^6) = \left[\text{Card}(E)\right]^6 = 3^6 = 729$.

II. Arrangements et permutations

Définition 2.4 – Arrangement

Soient A un ensemble non vide tel que $\text{Card}(A) = n$, et k un entier naturel inférieur ou égal à n.
Un **arrangement** de k éléments de A est un $\boldsymbol{k-}$**uplet** d'éléments disctincts de A.
On dit aussi un ***k*-arrangement**.

Exemple 2.7 :

Soit $E = \{1;2;3;4;5\}$.
Donner trois exemples de 3-arrangements de E.
$(1;2;3)$, $(1{,}3{,}4)$ et $(3;2;1)$.

Remarque(s) :

- On peut l'interpréter comme un tirage **avec ordre** et **sans remise** de k éléments.

Définition 2.5 – Factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **factorielle** de n, le nombre :

$$\begin{aligned} n! &= \boldsymbol{n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1} \\ &= \prod_{k=1}^{n} k \end{aligned}$$

Par convention, on a $\boldsymbol{0! = 1}$.

Propriété 2.5 – Nombre d'arrangements d'un ensemble

Le nombre de k-arrangements de A est égal à :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^k &= \boldsymbol{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)} \\ &= \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{(n-k)!}} \end{aligned}$$

Remarque(s) :

- Il s'agit du nombre de manières de "ranger", ou "arranger" k éléments choisis parmi les n éléments de l'ensemble.

Exemple 2.8 :

Un professeur doit évaluer 5 élèves à l'oral, mais il n'a le temps d'en interroger encore que 3.

Dans combien d'ordre différents peut-il les interroger ?
Si on attribue un numéro à chaque élève, on peut noter $E = \{1;2;3;4;5\}$ l'ensemble des élèves.
On cherche le nombre de 3-arrangements de E.

$$\begin{aligned} A_5^3 &= \frac{5!}{(5-3)!} \\ &= \frac{5\times4\times3\times2\times\times1}{2\times1} \\ &= 60 \end{aligned}$$

Il y a donc 60 ordres différents dans lesquels il pourrait interroger 3 élèves.

Définition 2.6 – Permutation

On appelle **permutation** de A un n-uplet d'éléments distincts de A.

Remarque(s) :

- Autrement dit, il s'agit d'un arrangement de tous les éléments de A.

Propriété 2.6

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est égal à $n!$.

Exemple 2.9 :

En reprenant l'exemple 2.8, dans combien d'ordres différents le professeur peut-il interroger les 5 élèves ?
Cette fois-ci, cela revient à calculer le nombre de permutations de E.
Ainsi, le nombre d'ordres de passage est égal à $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$.

III. Combinaisons

1) Partie d'un ensemble

Définition 2.7 – Partie d'un ensemble

On appelle **partie** d'un ensemble A un sous-ensemble de A.
On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble de toutes les parties de A.

Exemple 2.10 :

Soit $A = \{1;2\}$.
Donner toutes les parties de A.
Il y a : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1;2\}$, et $\emptyset$, qui fait aussi partie des sous-ensembles de A.

Propriété 2.7 – Nombre de parties d'un ensemble fini

Soit A un ensemble fini à n éléments.
Le nombres de parties de A est égal à 2^n.
On peut noter :

$$\mathbf{Card}\big(\mathcal{P}(A)\big) = 2^n$$

Exemple 2.11 :

Soit $A = \{1;2;3\}$.
Combien de parties de A existe-t-il ?
$\text{Card}(A) = 3$, ainsi : $\text{Card}(\mathcal{P}(A)) = 2^3 = 8$.
On pourrait toutes les noter pour s'en convaincre. Il ne faut alors bien sûr pas oublier $\emptyset$.

DÉMONSTRATION

Lorsqu'on cherche à construire une partie de A, pour chaque élément de A il y a deux choix possibles : soit il appartient à cette partie, soit il ne lui appartient pas.
Si un élement appartient à la partie, on peut considérer qu'on lui affecte la valeur 1, et la valeur 0 sinon.
Ainsi, on cherche finalement le nombre de n-uplets de $\{0;1\}$, ou encore le cardinal de $\{0;1\}^n$.
Or on sait que $\text{Card}\left(\{0;1\}^n\right) = [\text{Card}(\{0;1\})]^n = 2^n$. □

2) Nombre de combinaisons

Définition 2.8 – Combinaison

Soient A un ensemble à n éléments et $k \leq n$ un entier naturel. On appelle **combinaison** de k éléments de A toute partie de A de cardinal k.

On note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments parmi n.

Propriété 2.8

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$.

1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Propriété 2.9 – Relation de Pascal

Si $1 \leq k \leq n-1$, alors :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Remarque(s) :

- Lorsqu'on compte le nombre de parties à k éléments d'un ensemble, on peut d'abord compter celles qui contiennent le premier élément de l'ensemble. Pour compter celles-ci, il faut compter le nombre de possibilités de choisir $k-1$ éléments (k moins celui déjà choisi) parmi les $n-1$ restants.
  Il reste ensuite à compter les parties qui ne contiennent pas le premier élément de l'ensemble.
  Il s'agit du nombre de possibilité de choisir k éléments parmi $n-1$.
  En sommant les deux, on obtient la relation de Pascal, qui peut aussi être démontrée par le calcul.

Propriété 2.10

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Démonstration

Notons A_k l'ensemble des parties de A à k éléments.

On sait que $\mathrm{Card}(A_k) = \binom{n}{k}$ et que les A_k sont deux à deux disjoints.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(\mathcal{P}(A)) &= \mathrm{Card}(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n) \\
&= \mathrm{Card}(A_0) + \mathrm{Card}(A_1) + \ldots + \mathrm{Card}(A_n) \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Or on sait aussi que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(A)) = 2^n$, d'où le résultat. □

Exemple 2.12 :

Dans un jeu de 52 cartes, on tire trois cartes simultanément.
Combien de tirages comportent au moins un roi ?
On cherche combien de tirages n'en contiennent aucun.
Il y en a $\binom{48}{3}$.
Il y a alors $\binom{52}{3} - \binom{48}{3}$ tirages qui contiennent au moins un roi, soit 4804.

I. Limites usuelles et opérations sur les limites

1) Limites usuelles

Propriété 3.1 – Limites finies usuelles

u_n	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
$\frac{1}{n}$	**0**
$\frac{1}{\sqrt{n}}$	**0**
$\frac{1}{n^k}$, $k \in \mathbb{N}^*$	**0**
q^n avec $-1 < q < 1$	**0**

Démonstration

Démontrons par exemple que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$ un réel.

$$\begin{aligned} -\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon &\Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Soit n_0 le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$.
Pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{n} \in]-\varepsilon;\varepsilon[$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. □

Propriété 3.2 – Limites infinies usuelles

u_n	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
n	$+\infty$
$\sqrt{n}$	$+\infty$
n^k, $k \in \mathbb{N}^*$	$+\infty$
q^n avec $q > 1$	$+\infty$

2) Opérations sur les limites

a) Limite d'une somme de suites

Propriété 3.3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et l et l' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I**

F.I : **Forme indéterminée**.

Remarque(s) :

- Lorsqu'on rencontre une forme indéterminée, la limite est à étudier au cas par cas.

Exemple 3.1 :

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - 1{,}1^n$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -1{,}1^n = -\infty$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3n}{2}$ et $v_n = -n$.
Déterminer la limite de la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = u_n + v_n$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.
On obtient une forme indéterminée.
Cependant, on a :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{3n}{2} - n \\ &= \frac{3n}{2} - \frac{2n}{2} \\ &= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = +\infty$.

b) Limite d'un produit de suites

Propriété 3.4

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et l et l' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	**F.I**

Remarque(s) :

- Lorsque la limite résultante du produit est $\pm\infty$, il s'agit d'appliquer la règle des signes pour ce produit.

Exemple 3.2 :

1. Dans chacun des cas, déterminer la limite de la suite (w_n) définie par $w_n = u_n \times v_n$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 + 0{,}1^n$ et $v_n = -2 + \frac{13}{\sqrt{n}}$.
   $-1 < 0{,}1 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}1^n = 0$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{13}{\sqrt{n}} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -2$.
   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 5 \times (-2) = -10$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2$ et $v_n = -n^2$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

On applique la règle des signes, et on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 2n^2 - 4n + 1$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -4n+1 = -\infty$, donc il s'agit d'une forme indéterminée.
Cependant :

$$2n^2 - 4n + 1 = n^2\left(2 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} = 2$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c) Limite d'un quotient de suites

Propriété 3.5

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et l et l' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$0^{\pm}$	l	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$\frac{l}{l'}$	**0**	$\pm\infty$	$\pm\infty$	**F.I**	**F.I**

Remarque(s) :

- $0^{\pm}$ signifie qu'il faut regarder si la suite tend vers 0 en étant positive, ou en étant négative.
  Par exemple, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0^-$, tandis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0^+$.

Exemple 3.3 :

1. Déterminer la limite de (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{-4 - \frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -4 - \frac{1}{n^2} = -4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0^-$.
En appliquant la règle des signes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. Déterminer la limite de (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{2n^2 + n}{n^3 + 6n + 1}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 + n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 + 6n + 1 = +\infty$.
Il s'agit donc d'une forme indéterminée.

Cependant :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^3\left(1+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)} \\ &= \frac{2+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right) = +\infty$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

II. Comparaison

Théorème 3.1 – Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

1. Si à partir d'un certain rang, $u_n \le v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. Si à partir d'un certain rang, $u_n \le v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

1. Soit n_0 le rang à partir duquel $u_n \le v_n$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc pour tout réel $A > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge n_1$, $u_n \ge A$.
   Soit $N = max(n_0 ; n_1)$.
   Alors pour tout $n \ge N$, $u_n \ge A$ et $v_n \ge u_n$, donc $v_n \ge A$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. On montre le point 2. par un raisonnement analogue.

$\square$

Exemple 3.4 :

Déterminer la limite de le suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + (-1)^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \ge -1$, donc $n^2 + (-1)^n \ge n^2 - 1$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 1 = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 3.2 – Théorème des gendarmes

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ et qu'à partir d'un certain rang $v_n \le u_n \le w_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Démonstration

Soit n_0 le rang à partir duquel $v_n \le u_n \le w_n$.
Soit $\varepsilon > 0$ un réel.

Par définition de la convergence, il existe $(n_1 ; n_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} \forall n \geq n_1,\ l - \varepsilon \leq v_n \leq l + \varepsilon \\ \forall n \geq n_2,\ l - \varepsilon \leq w_n \leq l + \varepsilon \end{cases}$$

En posant $N = max(n_0, n_1, n_2)$, on a pour tout $n \geq N$:

$$l - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq l + \varepsilon$$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \underbrace{l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon}_{|u_n - l| \leq \varepsilon}$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$. □

Exemple 3.5 :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 2 + \frac{\cos(n)}{n}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{n}$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$.
Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

I. Vecteurs de l'espace

Définition 4.1 – Vecteur

Soient A et B deux points distincts de l'espace.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- sa **direction**, celle de (AB).
- son **sens**, de A vers B.
- sa **norme**, notée $||\overrightarrow{AB}||$, qui est la longueur du segment $[AB]$.

Définition 4.2 – Translation

Soient A et B deux points distincts de l'espace. La **translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation qui à tout point C associe l'unique point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

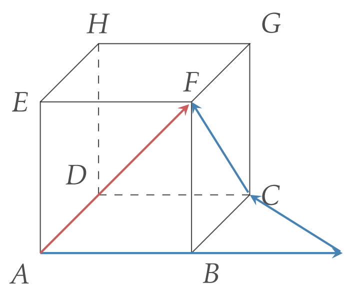
Définition 4.3 – Combinaison linéaire de vecteurs

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Tout vecteur de la forme $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exemple 4.1 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

1. Représenter le vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$.



2. Exprimer $\overrightarrow{AH}$ comme combinaison linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{CG}$.
   $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$.

II. Droites de l'espace

Rappel Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Définition 4.4 – Vecteur directeur

Soit d une droite de l'espace.
On dit que $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de d si $\vec{u}$ a la même direction que d.

Définition 4.5 – Droite de l'espace

Soient A un point et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.
La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

Propriété 4.1 – Droites parallèles

Soient d_1 et d_2 deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
d_1 et d_2 sont parallèles si et seulement si **$\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires**.

III. Plans de l'espace

Définition 4.6 – Vecteurs coplanaires

Deux vecteurs non nuls et non colinéaires sont dits **coplanaires**.

Remarque(s) :

- Autrement dit, deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan.

Définition 4.7 – Plan de l'espace

Soient A un point de l'espace, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs coplanaires.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$, avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ est le **plan passant par A** et **dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$**.

Illustration

Propriété 4.2

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

Remarque(s) :

- Autrement dit, trois vecteurs sont coplanaires si on peut écrire un des trois vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.

Exemple 4.2 :

On considère une pyramide $ABCDE$ de sommet E dont la base est le parallélogramme $ABCD$. Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
Démontrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} \\
&= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} \\
&= 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} \\
&= 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} \qquad ABCD \text{ parallélogramme} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \\
&= 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AB} \\
&= \vec{v} + \vec{u}
\end{aligned}$$

$\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

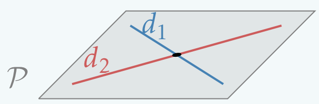
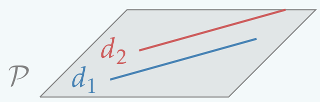
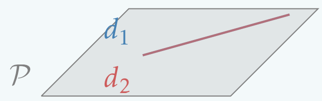
IV. Position relative de droites/plans de l'espace

1) Position relative de droites

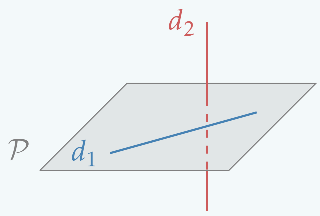
Propriété 4.3

Deux droites de l'espace peuvent être :

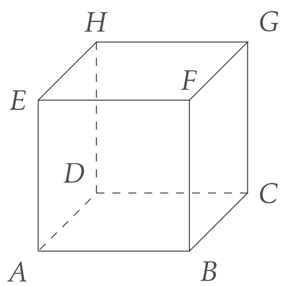
- coplanaires :

Sécantes	Parallèles	
	strictement	**confondues**
		

- non coplanaires (elles sont alors **non parallèles et non sécantes**).



Exemple 4.3 :



1. Nommer deux droites parallèles. (AB) et (HG) sont parallèles (et donc coplanaires).
2. Nommer deux droites sécantes. (AB) et (FB) sont sécantes (et donc coplanaires).
3. Nommer deux droites non coplanaires. (EF) et (HD) sont non coplanaires.

2) Position relative d'une droite et d'un plan

Propriété 4.4

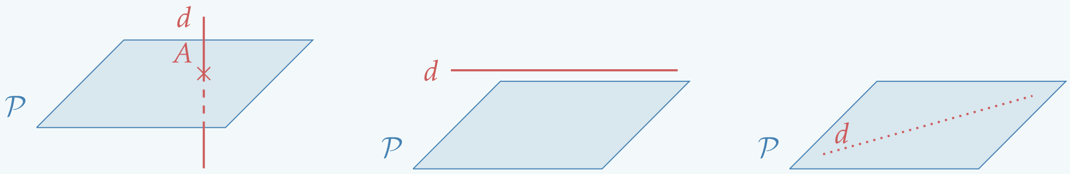
Soit $\mathcal{P}$ un plan, et d une droite de l'espace. $\mathcal{P}$ et d peuvent être :

- **sécants**. Leur intersection est alors **un point**.
- **parallèles**. On alors :
  1. $\mathcal{P}$ et d strictement parallèles.

     ou

  2. d **incluse** dans $\mathcal{P}$ (on note $\boldsymbol{d \subset \mathcal{P}}$)

Sécantes	**Parallèles**	
	strictement	$\boldsymbol{d \subset \mathcal{P}}$

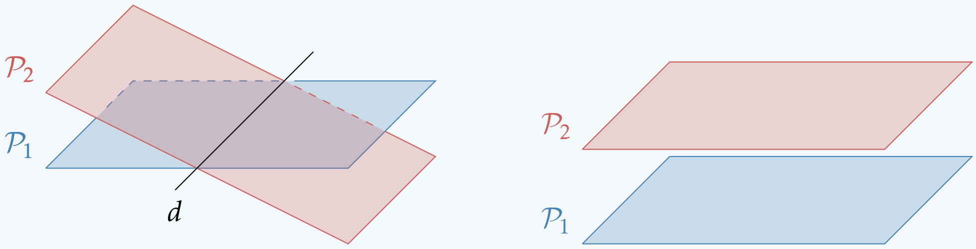


3) Position relative de deux plans

Propriété 4.5

Deux plans de l'espace sont soit **sécants**, soit **parallèles**.

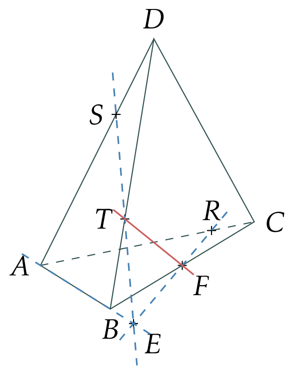
Sécants	**Parallèles**



Exemple 4.4 :

Soit $ABCD$ un tétraèdre, et soient R, S et T tels que $\overrightarrow{AR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.

1. Faire une figure représentant la situation.



2. Démontrer que les plans (BCD) et (RST) sont sécants.
   $T \in (RST)$.
   De plus, $T \in (BD)$, donc $T \in (BCD)$.
   Donc $T \in (RST) \cap (BCD)$.
   Donc les plans (RST) et (BCD) sont sécants.
3. Déterminer et dessiner l'intersection de ces deux plans.
   (ST) et (AB) sont coplanaires et sécantes.
   Nommons E leur intersection.
   $E \in (AB)$, donc $E \in (ABC)$.
   $R \in (AC)$, donc $R \in (ABC)$.
   Donc (RE) et (BC) sont coplanaires et sécantes.
   Nommons F leur intersection.
   Les points F et T appartiennent à $(RST) \cap (BCD)$.
   Donc l'intersection de (RST) et (BCD) est la droite (FT).

V. Repère de l'espace

1) Base de l'espace

Définition 4.8

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **linéairement indépendants** lorsqu'ils ne sont pas coplanaires, autrement dit lorsque :

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow a = b = c = 0$$

Définition 4.9

Trois vecteurs linéairement indépendants forment une **base** de l'espace.

Propriété 4.6

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Exemple 4.5 :

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base de l'espace, et soient $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$.

1. Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

   $\vec{u} = 1 \times \vec{i} + 1 \times \vec{j} + 1 \times \vec{k}$, donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

2. Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

$$\begin{aligned}
a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} &\Leftrightarrow a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{0}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a-b+c\\a+b\\a+c\end{pmatrix} = \vec{0}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}a-b+c=0\\a+b=0\\a+c=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}a-b+c=0\\a+b=0\\c-b=0 \quad L_3 - L_2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\b=-a\\c=b\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}
\end{aligned}$$

   Donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

3. Que peut-on en déduire ?
   Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

2) Coordonnées dans l'espace

Définition 4.10

Un **repère de l'espace** est la donnée d'un point O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.
On note un tel repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Définition 4.11

Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère.
Pour tout point M, il existe un **unique** $\left(x;y;z\right) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
x, y et z sont les **coordonnées** de M dans $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Illustration

Propriété 4.7 – Coordonnées d'un vecteur

Soient $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$.
Alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Propriété 4.8 – Coordonnées d'un milieu

Soient $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$.
Soit I le milieu de $[AB]$.

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

I. Définitions et propriétés

Dans ce qui suit, on suppose que f est une fonction telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $[\alpha;+\infty[\subset \mathbb{D}_f$ (**ensemble de définition** de f).

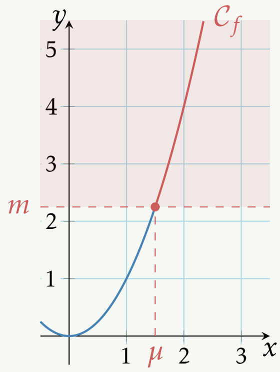
1) Limite à l'infini

a) Limite infinie

Définition 5.1

On dit que f **tend vers** $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque pour tout réel $m > 0$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, si $x > \mu$, alors $f(x) > m$.
On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
NB : en utilisant les notations mathématiques, on peut écrire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ lorsque :

$$\forall m > 0, \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > \mu \Rightarrow f(x) > m$$



Remarque(s) :

- Autrement dit, quel que soit $m > 0$, $f(x) > m$ pour x suffisamment grand.

Exemple 5.1 :

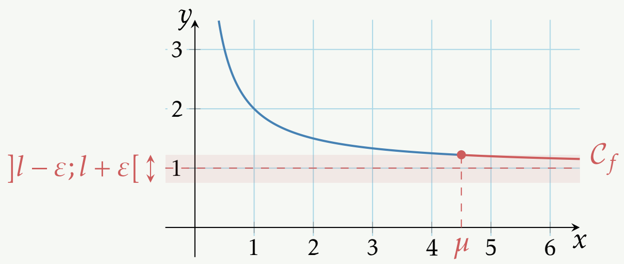
Soit $f : x \mapsto x^2$.
Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Soit $m > 0$ un réel.
$x > \sqrt{m} \Rightarrow x^2 > m$ car la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

b) Limite finie

Définition 5.2

On dit que f tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque pour tout ε, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, si $x > \mu$, alors $\left|f(x) - l\right| < \varepsilon$.
On note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.
Avec les notations mathématiques, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ lorsque :

$$\forall \varepsilon, \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > \mu \Rightarrow \left|f(x) - l\right| < \varepsilon$$



Remarque(s) :

- Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi proche de l que l'on souhaite, pour peu que x soit suffisamment grand.
- On rappelle que $\left|f(x)-l\right| < \varepsilon$ revient à dire que $f(x) \in]l-\varepsilon;l+\varepsilon[$. Autrement dit, $f(x)$ est "éloigné" au plus, de ε de la valeur l.

Exemple 5.2 :

Sur l'écran de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 2+\frac{1}{x}$.
Quelle semble être la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$? Vers $-\infty$?
On observe graphiquement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

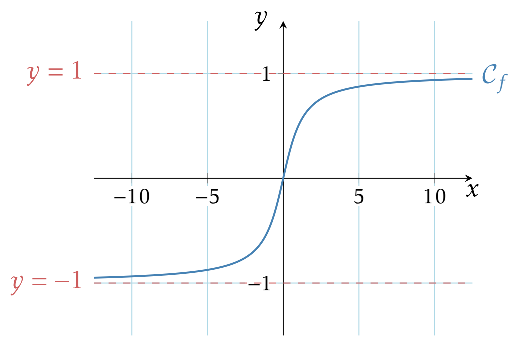
Définition 5.3 – Asymptote horizontale

On dit que la droite d'équation $\boldsymbol{y = l}$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Exemple 5.3 :

Soit f une fonction dont la courbe représentative est tracée ci-contre.
Conjecturer le tableau de variations de f, et les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	↗



La courbe de f semble admettre deux asymptotes horizontales d'équation $y=-1$ en $-\infty$ et $y=1$ en $+\infty$.
On peut donc conjecturer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

c) Limites usuelles

Propriété 5.1

1. Si n est pair, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
2. Si n est impair :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

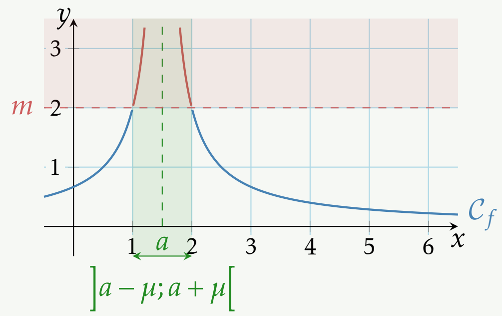
2) Limite en un réel

a) Limite infinie

Définition 5.4

On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a lorsque pour tout $m > 0$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$tel que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, si $|x-a| < \mu$ alors $f(x) > m$.
On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
Avec les notations mathématiques, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ lorsque :

$$\forall m > 0, \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x-a| < \mu \Rightarrow f(x) > m$$



Remarque(s) :

- Autrement dit, quel que soit m, $f(x) > m$ lorsque x est suffisamment proche de a.

Définition 5.5 – Asymptote verticale

On dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$ lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Exemple 5.4 :

Sur l'écran de la calculatrice, dresser la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 3 + \frac{1}{x-2}$.

1. Préciser les asymptotes à la courbe de f. On donnera leur équation.
   $\mathcal{C}_f$ a :

- une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
- une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $-\infty$, ainsi qu'en $+\infty$.

2. Préciser les limites que l'on peut déduire de ces asymptotes.

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

b) Limite finie

Définition 5.6

On dit que f tend vers l lorsque x tend vers a, lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mu > 0$ telque pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $|x - a| < \mu \Rightarrow \left|f(x) - l\right| < \varepsilon$.
On note alors $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} f(x) = l}$.
Avec les notations mathématiques, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ lorsque :

$$\forall \varepsilon, \exists \mu > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \mu \Rightarrow \left|f(x) - l\right| < \varepsilon$$

c) Limites usuelles

Propriété 5.2 – Limites usuelles en 0

1. Si n est pair, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$.
2. Si n est impair, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

NB : lorsqu'on regarde la limite lorsque x tend vers 0^- (respectivement vers 0^+), on parle de **limite à gauche** (respectivement de **limite à droite**).

Propriété 5.3

1. Pour tout $a \geq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
2. Si P est un polynôme, alors $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.
3. Si F est une fonction rationnelle définie en a, alors $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$.
4. $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a$.

Rappel Une fonction rationnelle est un quotient de deux polynômes.

II. Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions, et l et l' deux réels.

1) Somme

Propriété 5.4 – Limite d'une somme de fonctions

f tend vers	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g tend vers	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ tend vers	$\boldsymbol{l+l'}$	$\boldsymbol{+\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	$\boldsymbol{+\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	**F.I**

Remarque(s) :

- On retrouve des propriétés similaires à celles vues avec les suites, mais ici les limites de ces fonctions peuvent être considérées lorsque x tend vers un réel a, ou encore vers $-\infty$, et non seulement en $+\infty$.

Exemple 5.5 :

1. Déterminer la limite de $f : x \mapsto x^3 + x - 2$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 + x - 5\right) = +\infty$.
2. Déterminer la limite de $f : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.
   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) Produit

Propriété 5.5 – Limite d'un produit de fonctions

f tend vers	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
g tend vers	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
fg tend vers	$\boldsymbol{l \times l'}$	$\boldsymbol{\pm\infty}$	$\boldsymbol{\pm\infty}$	**F.I**

Remarque(s) :

- Comme dans le chapitre où nous avons étudié la limite de suites, $\pm\infty$ signifie qu'il faut appliquer la règle des signes.

3) Quotient

Propriété 5.6 – Limite d'un quotient de fonctions

f tend vers	l	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
g tend vers	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$0^{\pm}$	l'	$\pm\infty$	0
$\frac{f}{g}$ tend vers	$\boldsymbol{\frac{l}{l'}}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\pm\infty}$	$\boldsymbol{\pm\infty}$	**F.I**	**F.I**

Exemple 5.6 :

Déterminer la limite de $f : x \mapsto \frac{x^2}{(x-2)^2}$ lorsque x tend vers 2.
$\lim\limits_{x\to2} x^2 = 4$ et $\lim\limits_{x\to2} (x-2)^2 = 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-2)^2 \geq 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} \frac{x^2}{(x-2)^2} = +\infty$.

4) Gestion des formes indéterminées

Propriété 5.7

La limite d'un polynôme en $\pm\infty$ est donnée par la limite de son monôme de plus haut degré.

Propriété 5.8

Soient P et Q deux polynômes de degrés respectifs p et q.
Notons c_p et c_q les coefficients associés respectivement au monôme de plus haut degré de P et Q.
Alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{c_p x^p}{c_q x^q} = \lim_{x\to+\infty} \frac{c_p}{c_q} x^{p-q}$$

Remarque(s) :

- La propriété est aussi valable pour l'étude de la limite en $-\infty$.

Exemple 5.7 :

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^4-2x+1}{2x-1}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$.

Théorème 5.1 – Croissance comparée

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Exemple 5.8 :

Soit $f : x \mapsto e^x - x^2$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

III. Limites et comparaisons

Soient f, g et h trois fonctions, définies sur I tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $[\alpha;+\infty[\subset I$.

Théorème 5.2

- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple 5.9 :

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.
Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

Théorème 5.3 – Théorème des gendarmes

Si pour tout $x \in I$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$, alors $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l}$.

Exemple 5.10 :

Soit $g : x \mapsto \frac{2\cos(x)+1}{x^2+1}$.
Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Rappel Tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- son **sens** : de A vers B.
- sa **direction** : celle de (AB).
- sa **norme**, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ égale à la longueur du segment $[AB]$.

I. Produit scalaire et orthogonalité

1) Premières définitions et propriétés

Définition 6.1 – Produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, que l'on note $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$, le réel :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \boldsymbol{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})}$$

Remarque(s) :

- En particulier, comme $\cos(\vec{u},\vec{u}) = \cos(0) = 1$, on a $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$.

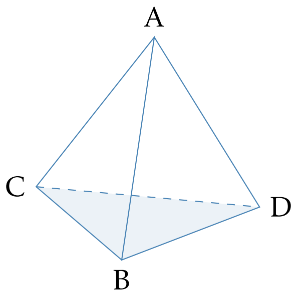
Propriété 6.1 – Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout $k \in \mathbb{R}$, on a :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}}$
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = \boldsymbol{(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})}$

Exemple 6.1 :

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de côté 3.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}\cdot 2\overrightarrow{CB}$.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\\ &= 3\times3\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= 9\times\frac{1}{2} = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

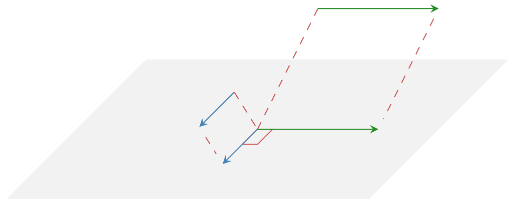
$\overrightarrow{BD}\cdot 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD}\cdot(-2\overrightarrow{BC}) = -2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC} = -2BD\times BC\times\cos\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\right) = -2\times3\times3\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -9.$

2) Orthogonalité dans l'espace

Définition 6.2 – Vecteurs orthogonaux

- Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles respectives passant par un même point sont perpendiculaires.
- Deux vecteurs sont dits **orthogonaux** si l'un des deux est nul ou si leurs directions sont orthogonales.

Illustration



Propriété 6.2 – Orthogonalité et produit scalaire

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si **leur produit scalaire est nul**.

Propriété 6.3 – Droites orthogonales

Deux droites sont orthogonales si et seulement si **leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux**.

Exemple 6.2 :

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arêtes de longueur l.
Démontrer que (AD) et (BC) sont orthogonales.
Montrons que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= \left(-\overrightarrow{CA}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{CB}\right) + \overrightarrow{CD} \cdot \left(-\overrightarrow{CB}\right) \\
&= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} \\
&= CA \times CB \times \cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) - CD \times CB \times \cos\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right) \\
&= l \times l \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - l \times l \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
Donc (AD) et (BC) sont orthogonales.

Propriété 6.4 – Orthogonalité d'une droite et d'un plan

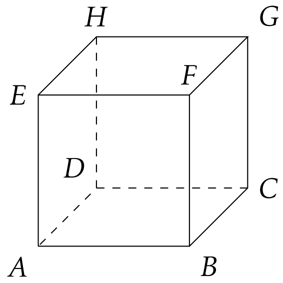
Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Propriété 6.5

Si une droite est orthogonale à un plan, alors est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Exemple 6.3 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube.
Démontrer que (AE) est orthogonale au plan (ABC).
(AD) et (AB) sont sécantes.
De plus $(AE) \perp (AD)$ et $(AE) \perp (AB)$.
Donc (AE) est orthogonale au plan (ABC).



Rappel Un **vecteur normal à une droite** est un vecteur **non nul** et **orthogonal** à un vecteur directeur de cette droite.

Définition 6.3 – Vecteur normal à un plan

Soit d une droite orthogonale à un plan $\mathcal{P}$.
On appelle **vecteur normal au plan** $\mathcal{P}$ tout vecteur directeur de d.

Remarque(s) :

- Ce qu'on appelle un vecteur normal à une droite ou à un plan correspond donc simplement à un vecteur non nul orthogonal à cette droite ou à ce plan.

Propriété 6.6

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ (i.e à une base de $\mathcal{P}$).

Exemple 6.4 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

1. Nommer deux vecteurs normaux à (FG).
   $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Nommer deux vecteurs normaux à (BCD).
   $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{HD}$.

II. Produit scalaire et normes

Propriété 6.7 – Identités remarquables

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :

1. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
2. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Démonstration

Démontrons le premier point :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= \vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\\ &= \|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

Le second point se démontre de la même manière. □

Propriété 6.8 – Formules de polarisation

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Exemple 6.5 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{22}$.
Quelle est la mesure principale de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$? Arrondir au degré.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(3^2+5^2-\sqrt{22}^2\right) = 6$.

De plus, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Ainsi : $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Donc $(\vec{u},\vec{v}) = \arccos\left(\frac{2}{5}\right) \approx 66°$.

III. Expression analytique du produit scalaire

Définition 6.4 – Base orthonormée / repère orthonormé

$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une **base orthonormée** de l'espace si et seulement si :

- $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont linéairement indépendants (ils forment alors une base de l'espace).
- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ (les trois vecteurs sont de norme 1).
- $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$ (les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux).

Un **repère orthonormé** de l'espace est la donnée d'un point désignant l'origine, et d'une base orthonormée de l'espace.

Théorème 6.1 – Expression analytique du produit scalaire

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ **dans un repère orthonormé.**

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\cdot\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)\\ &= xx'\vec{i}^{\,2}+xy'\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{j}}_{=0}+xz'\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{k}}_{=0}\\ &\quad \ldots+yx'\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{i}}_{=0}+yy'\vec{j}^{\,2}+yz'\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{k}}_{=0}\\ &\quad \ldots+zx'\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{i}}_{=0}+zy'\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{j}}_{=0}+zz'\vec{k}^{\,2}\end{aligned}$$

Or $\vec{i}^{\,2}=\|\vec{i}\|^2=1^2=1$, et de même $\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1$ dans un repère orthonormé.
Ainsi :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

□

Exemple 6.6 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube.
Démontrer que $\overrightarrow{ED}$ est normal au plan (ABH).
On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

Dans ce repère : $E(0;0;1)$ et $D(0;1;0)$, donc $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ forment une base de (ABH). Montrons alors que $\overrightarrow{ED}$ est orthogonal à ces deux vecteurs.

$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$ et $H(0;1;1)$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi :

- $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{AB}=0\times1+1\times0+(-1)\times0=0$.
- $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{AH}=0\times0+1\times1+(-1)\times1=0$.

Donc $\overrightarrow{ED}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AH}$.
Donc $\overrightarrow{ED}$ est un vecteur normal au plan (ABH).

Corollaire 6.9 – Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ **dans un repère orthonormé.**

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Démonstration

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$$
$$= xx + yy + zz \quad \text{(expression analytique du produit scalaire)}$$
$$= x^2 + y^2 + z^2$$

On en déduit que $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. □

IV. Projeté orthogonal et distances dans l'espace

1) Projeté orthogonal d'un point sur une droite / sur un plan

Rappel Soit d une droite et A un point extérieur à cette droite.
On appelle **projeté orthogonal** de A sur d l'intersection de d avec la droite perpendiculaire à d passant par A.
On peut aussi le définir comme le point H de d tel que $(AH) \perp d$.

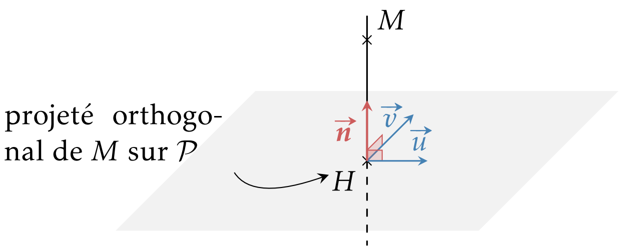
Définition 6.5 – Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Soient $\mathcal{P}$ un plan, $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et M un point extérieur à $\mathcal{P}$.
On appelle **projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$** l'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite passant par M et dirigée par $\vec{n}$.

Remarque(s) :

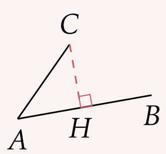
- Le préfixe « ortho » signifie « droit » en grec, et le suffixe « gônia » signifie « angle ». Il s'agit donc de projeter un point sur un plan en formant un angle droit.

Illustration



Théorème 6.2 – Produit scalaire et projeté orthogonal

Soient A, B et C trois points non alignés, et H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Alors :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$



Démonstration

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}$$

Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC} = 0$.

Ainsi :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

□

2) Distance d'un point à une droite / à un plan

Rappel Soient d une droite et A un point.
La distance de A à d est la plus petite longueur AM, avec $M \in d$.
Si on note H le projeté orthgonal de A sur d, on a $d(A;d) = AH$.

Définition 6.6 – Distance d'un point à un plan

Soient P un plan et A un point.
La distance de A à $\mathcal{P}$ est la plus petite longueur AM, avec $M \in \mathcal{P}$.

Propriété 6.10

Soient $\mathcal{P}$ un plan, A un point, et H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.
Alors $d(A,\mathcal{P}) = AH$.

Remarque(s) :

- Cela revient à dire que H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A.

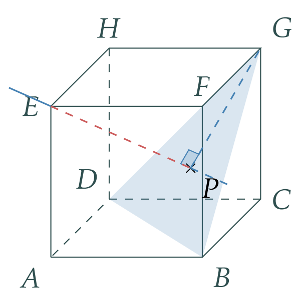
Démonstration

Soit $M \in \mathcal{P}$.
Si $M \neq H$, alors AMH est rectangle en H.
Dans ce triangle $[AM]$ est l'hypoténuse, donc $AM > AH$.
Si $M = H$, alors $AM = AH$.
Ainsi, la plus petite des longueurs AM avec $M \in \mathcal{P}$ est la longueur AH.
Donc $d(A,\mathcal{P}) = AH$.

□

Exemple 6.7 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube.
Calculer la distance de E au plan (BDG).



On commence par déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de E sur (BDG).
Soit $P\left(x;y;z\right)$ le projeté orthogonal de E sur (BDG).
On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.
Dans ce repère : $E(0,0,1)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$ et $G(1,1,1)$.

Ainsi : $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EP}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GP}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$.
(EP) est orthogonale à (BDG), donc $\overrightarrow{EP}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{DB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{DG}=0 &\Leftrightarrow x\times 1+y\times 0+(z-1)\times 1=0\\&\Leftrightarrow x+z-1=0\\&\Leftrightarrow z=1-x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{DB}=0 &\Leftrightarrow x\times 1+y\times(-1)+(z-1)\times 0=0\\&\Leftrightarrow x-y=0\\&\Leftrightarrow x=y\end{aligned}$$

De plus, $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{GP}=0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{GP}=0 &\Leftrightarrow x\times(x-1)+y(y-1)+(z-1)(z-1)=0\\&\Leftrightarrow x(x-1)+x(x-1)+(1-x-1)^2=0 \quad \text{(on substitue } x \text{ à } y \text{ et } z)\\&\Leftrightarrow 2x(x-1)+(-x)^2=0\\&\Leftrightarrow x\big(2(x-1)+x\big)=0\\&\Leftrightarrow x(3x-2)=0\\&\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad 3x-2=0\\&\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Or $x=0$ donne $P(0;0;1)$, soit $P=E$, ce qui est impossible.
Donc $x=\frac{2}{3}$.
On en déduit $y=\frac{2}{3}$ et $z=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.
Donc $P\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}EP&=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}\\&=\sqrt{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2}\\&=\frac{2}{3}\sqrt{3}\\&\approx 1{,}155\end{aligned}$$

I. Notion de continuité

1) Approche intuitive et graphique

Introduction La courbe représentative d'une fonction continue sur un intervalle se trace sans lever le crayon.
Donnons quelques exemples de courbes de fonctions continues sur un intervalle I :

Donnons quelques exemples de courbes de fonctions non continues en un réel a :

2) Définition et propriétés

Définition 7.1 – Continuité

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

1. f est **continue en a** si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. f est **continue sur I** si f est continue en a pour tout $a \in I$.

Propriété 7.1 – Continuité et dérivabilité

Toute fonction dérivable sur I est continue sur I.

Remarque(s) :

- Attention, la réciproque n'est pas vraie.

Propriété 7.2 – Fonctions de référence

Les fonctions de référence sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemple 7.1 :

Donner un exemple d'une fonction qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ mais qui est continue sur son ensemble de définition.
La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, mais elle est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

Propriété 7.3 – Continuité et opérations

1. Une combinaison linéaire de fonctions continues sur I est continue sur I.
2. Si f et g sont continues sur I, avec $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Exemple 7.2 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{\frac{1}{x}+\sqrt{x}}$.
Montrer que f est continue sur $]0;+\infty[$.
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$ et $v(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$.
u est continue sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions continues sur $]0;+\infty[$.
v est continue sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions continues sur $]0;+\infty[$.
De plus, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\frac{1}{x} + \sqrt{x} > 0$, donc $\frac{1}{x} + \sqrt{x} \neq 0$.
Donc $\frac{u}{v}$ est continue sur $]0;+\infty[$.

II. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 7.1 – Théorème des valeurs intermédiaires ou théorème de Bolzano

Soit f une fonction **définie et continue** et un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $\boldsymbol{f(c) = k}$.

Illustration

Exemple 7.3 :

Soit $f : x \mapsto x^3 - 2x - 5$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[1;3]$.
   $f(1) = 1^3 - 2 \times 1 - 5 = -6$ et $f(3) = 3^3 - 2 \times 3 - 5 = 16$.
   $0 \in \left[f(1); f(3)\right]$ et f est continue sur $[1;3]$.
   Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[1;3]$.

Corollaire 7.4 – Cas des fonctions strictement monotones

Soit f une fonction définie, continue et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.

Illustration

Exemple 7.4 :

On reprend le cas de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 2x - 5$.
Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[1;3]$.
$f'(x) = 3x^2 - 2$.
$f'(x)$ a deux racines : $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
$a = 3 > 0$ et on sait qu'un polynôme du second degré est du signe de a sauf entre ses racines.
On en déduit :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

En particulier, f est strictement croissante sur $[1;3]$.
De plus, f est continue sur $[1;3]$ et $0 \in \left[f(1);f(3)\right]$.
Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[1;3]$.

III. Application aux suites

Propriété 7.5

Soient f une fonction définie et continue sur I et (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.

Démonstration

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = f(u_n)$.
f est continue sur I et $l \in I$, donc f est continue en l.

Donc :

$$\lim_{x\to l} f(x) = f(l)$$

Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0, |x-l| < \mu \Rightarrow |f(x) - f(l)| < \varepsilon \quad (*)$$

u_n tend vers l, donc :

$$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon_2$$

En particulier, cela est vrai pour $\varepsilon_2 = \mu$.
On en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| < \mu$.
Ce qui implique d'après (*) que $|f(u_n) - f(l)| < \mu$, soit $|v_n - f(l)| < \mu$. On en déduit que (v_n) tend vers $f(l)$.
On a ainsi :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f(u_n) &= \lim_{n\to+\infty} v_n \\ &= f(l)\end{aligned}$$

□

Remarque(s) :

- Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)$.

Théorème 7.2 – Théorème du point fixe

Soient f une fonction définie et continue sur I et (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, alors $\boldsymbol{f(l) = l}$.

Démonstration

$l = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = f(l)$. □

Exemple 7.5 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{2}{u_n+1} + 3$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.
   Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $u_n \geq 2$ ».
   - Initialisation : $u_1 = -\frac{2}{u_0+1} + 3 = -\frac{2}{2} + 3 = 2$.
     Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : $\mathcal{P}_1$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 1.
     Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.
2. Démontrer que (u_n) est croissante.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.
4. En déduire que (u_n) converge.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2;3]$.
   $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto -\frac{2}{x+1} + 3$.
   f est continue sur $[2;3]$.
   Donc $f(l) = l$.
   Recherchons cette limite :

Rappel

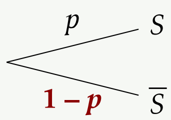
1. On appelle **univers** d'une expérience aléatoire, souvent noté Ω, l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience.
   Exemple : on lance un dé à six faces.
   L'univers de cette expérience aléatoire est :
   $$E = \{\mathbf{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6}\}$$
2. On appelle **évènement** un sous-ensemble de Ω.
   Exemple : "obtenir un résultat pair" est un évènement. Il s'agit de l'ensemble d'issues $\{\mathbf{2\,;\,4\,;\,6}\}$
3. On définit une **variable aléatoire** sur Ω lorsqu'on associe un nombre réel à chacune des issues.
   Une variable aléatoire est donc une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
4. Calcul d'une **probabilité conditionnelle** (probabilité que l'évènement A se produise sachant que l'évènement B est réalisé) :
   $$P_B(A) = \frac{\boldsymbol{P(A\cap B)}}{\boldsymbol{P(B)}}$$
   NB :
   - On lit "P de A sachant B".
   - Les probabilités conditionnelles sont celles qui apparaissent sur les branches du deuxième niveau d'un arbre pondéré.
5. Formule des probabilités totales :
   Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un partition de Ω, alors pour tout évènement B :
   $$P(B) = \boldsymbol{P(A_1\cap B) + P(A_2\cap B) + \ldots + P(A_n\cap B)}$$
   NB : cela revient dans bien des cas à calculer la somme des probabilités de tous les chemins qui terminent par B sur un arbre pondéré.
6. La donnée de toutes les probabilités associées à chaque valeur d'une variable aléatoire est appelée **loi de probabilité** de cette variable aléatoire.

I. Épreuve et loi de Bernoulli

1) Définitions

Définition 8.1 – Épreuve de Bernoulli

Soit $p \in [0;1]$.
On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire à **deux** issues, de probabilités respectives p et $\mathbf{1-p}$.



Remarque(s) :

- En général, ces deux issues sont appelées « succès » et « échec », sans que cela ait nécessairement la signification d'un succès dans telle ou telle expérience. Il s'agit plutôt de termes génériques utilisés historiquement.

- On a bien $p+(1-p)=1$.

Définition 8.2 – Loi de bernoulli

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0;1\}$, où la valeur 1 est associée au succès d'une épreuve de Bernoulli dont le succès a pour probabilité p, et où la valeur 0 est associée à l'échec.
On dit que X est une **variable aléatoire de Bernoulli**, et X suit alors la **loi de Bernoulli de paramètre p**.

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	p	$1-p$

Exemple 8.1 :

On considère l'expérience aléatoire suivate : on lance un dé cubique équilibré et on regarde si le résultat obtenu est strictement supérieur à 2.
Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est strictement supérieur à 2 et 0 sinon.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
   Il y a 4 chances sur 6 de tomber sur un numéro supérieur strictement à 2.
   X suit ainsi une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$.
2. Représenter cette loi sous forme de tableau.

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

2) Espérance et variance pour une variable aléatoire de Bernoulli

Rappel

1. L'espérance d'une variable aléatoire est le nombre $E(X)$ défini par :
$$E(X)=\sum_{i=1}^{k} x_i P(X=x_i)$$
   Elle détermine la valeur moyenne prise par X sur un grand nombre d'expériences.
2. La variance d'une variable aléatoire X est le réel noté $\mathrm{Var}(X)$, défini par :
$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-E(X)\right)^2 P(X=x_i)$$
   La variance renvoie la moyenne du carré des écarts à l'espérance. Il s'agit d'un indicateur de dispersion autour de l'espérance.

Propriété 8.1 – Espérance et variance d'une variable aléatoire de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
Alors $E(X)=\boldsymbol{p}$ et $\mathrm{Var}(X)=\boldsymbol{p(1-p)}$.

Démonstration

$$\begin{aligned} E(X) &= 1\times P(X=1)+0\times P(X=0)\\ &= 1\times p+0\times(1-p)\\ &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \left(1-p\right)^2\times P(X=1)+\left(0-p\right)^2\times P(X=0)\\ &= (1-p)^2\times p+(-p)^2\times(1-p)\\ &= (1-p)^2p+p^2(1-p)\\ &= p(1-p)\big((1-p)+p\big) \quad \text{(on factorise par } p(1-p))\\ &= p(1-p)\times 1\\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

□

II. Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Rappel Deux évènements sont dits **indépendants** si $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.
Concrètement, deux évènements sont indépendants lorsque la réalisation d'un des deux n'a pas d'impact sur la probabilité que l'autre se réalise.

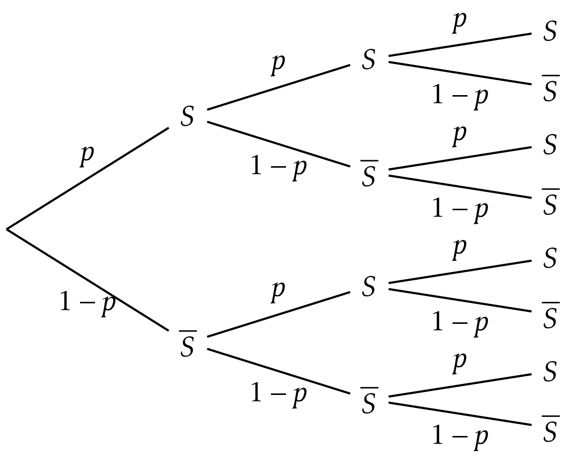
1) Schéma de Bernoulli

Définition 8.3 – Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, **identiques** et **indépendantes**.

Illustration

On a représenté ci-contre un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p.



2) Loi binomiale

a) Définition

Définition 8.4 – Loi binomiale

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p**.
On note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$$

La notation ci-dessus signifie : "X suit la loi binomiale de paramètres n et p".

Propriété 8.2 – Loi binomiale : calcul d'une probabilité

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$.
Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

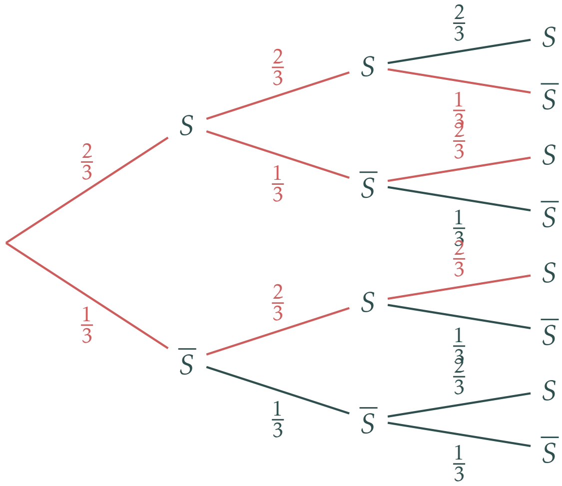
Démonstration

Si on représente la situation à l'aide d'un arbre de probabilité, $p^k \times (1-p)^{n-k}$ permet de calculer la probabilité d'un chemin contenant exactement k succès (il y a k branches avec la probabilité p et donc $n-k$ branches restantes avec la probabilité $1-p$).
Mais il peut y avoir plusieurs chemins associés à k succès.
Il y en a précisément $\binom{n}{k}$ dans le cas d'un schéma de Bernoulli où l'on répète n épreuves de Bernoulli. Il s'agit du nombre de combinaisons de k éléments parmi n.
Ainsi, multiplier le résultat de $p^k(1-p)^{n-k}$ par $\binom{n}{k}$ permet de comptabiliser tous ces chemins. □

Exemple 8.2 :

On considère une pièce de monnaie truquée, ayant 2 chances sur 3 de tomber sur « pile » et 1 chance sur 3 de tomber sur « face ».
On réalise l'expérience aléatoire qui consiste à jeter trois fois de suite cette pièce de monnaie, et à observer le résultat.

1. S'agit-il d'un schéma de Bernoulli ? *Justifier*.
   On réalise trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes consistant à jeter la pièce de monnaie et à observer le résultat.
   Il s'agit donc bien d'un schéma de Bernoulli.
2. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la pièce tombe côté « pile ».
   (a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
   X suit une loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{2}{3}$.
   $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3; \frac{2}{3}\right)$.
   (b) Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.



(c) Déterminer la probabilité d'obtenir deux succès.

Il y a $\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$ chemins contenant 2 succès.

$P(X=2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1-\frac{2}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.

Méthode **Calcul de probabilités avec la calculatrice**

- Casio 35 :

Probabilité de l'événement « *N* = 5 »

10 répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli avec une probabilité de succès 0,25. *N* suit la loi binomiale de paramètres *n* = 10 et *p* = 0,25 Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement « *N* = 5 » Dans le menu de Calcul RUN Touche **OPTN** et choix **STAT** (**F5**) puis **DIST** (**F3**) et enfin **BINM** (**F5**) Sélectionner **Bpd** (**F1**) puis renseigner : *Séquence :* **5** **,** **10** **,** **0,25** **)** puis **EXE** Syntaxe de l'instruction : *Bpd(Nombre de succès, nombre de répétitions, probabilité d'un succès)*	

Probabilité de l'événement « *N* ≤4 »

Touche **OPTN** et choix **STAT** (**F5**) puis **DIST** (**F3**) et enfin **BINM** (**F5**) Sélectionner **Bcd** (**F2**) puis renseigner : *Séquence :* **4** **,** **10** **,** **0,25** **)** puis **EXE** Syntaxe de l'instruction : *Bcd(Nombre maximal de succès, nombre de répétitions, probabilité d'un succès)*	

- TI 83 :

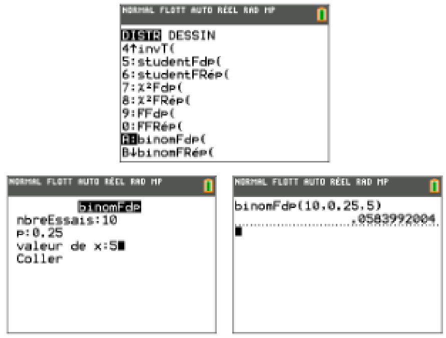
Probabilité de l'événement « $N = 5$ »

10 répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli avec une probabilité de succès 0.25. N suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,25$.
Il faut calculer la probabilité de l'événement « $N = 5$ ».

Rubrique **distrib** (touches **2nde** **var**)

Sélectionner à l'aide des curseurs **A : binomFdp(** et **entrer** .

Renseigner la boite de dialogue comme ci-contre puis valider avec la touche **entrer**. La séquence a été "collée" dans l'écran de calcul, valider à nouveau avec la touche **entrer**.

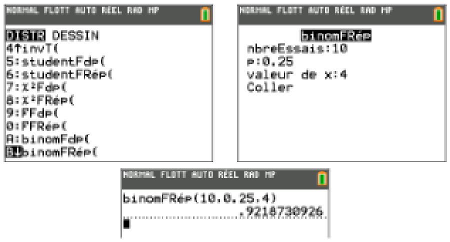


Probabilité de l'événement « $N \leq 4$ »

Rubrique **distrib** (touches **2nde** **var**)

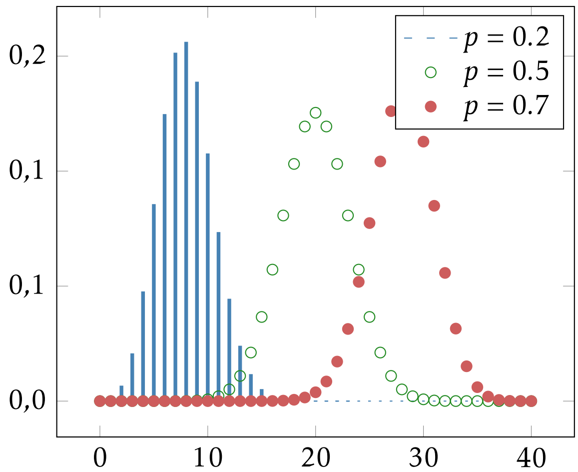
Sélectionner à l'aide des curseurs **B : binomFRép(** et **entrer**.

Renseigner la boite de dialogue comme ci-contre puis valider avec la touche **entrer**.



b) Représentation graphique

La distribution d'une loi binomiale peut être représentée à l'aide d'un diagramme en bâtons, ou d'un nuage de points dans lequel on lit en abscisses les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X et en ordonnée la probabilité associée.
On a représenté ci-dessous la distribution de trois loi binomiales de paramètre $n = 40$, et de paramètre p égal respectivement à 0,2, 0,5 et 0,7.



On remarque que plus p est grand, plus la probabilité d'obtenir un grand nombre de succès augmente, ce qui est cohérent.

c) Espérance, variance et écart-type

Propriété 8.3 – Loi binomiale : espérance, variance et écart-type

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$.
Alors :

1. $E(x) = \boldsymbol{np}$
2. $\text{Var}(X) = \boldsymbol{np(1-p)}$
3. $\sigma(X) = \sqrt{\boldsymbol{np(1-p)}}$

I. Fonction composée et dérivation

1) Composition

Définition 9.1 – Composée de fonctions

Soit u une fonction définie sur I et soit v une fonction définie sur J et à valeurs dans I.
On appelle **fonction composée de v par u** la fonction notée $u \circ v$, définie sur J par :

$$u \circ v(x) = u\big(v(x)\big)$$

On lit « **u rond v** ».

Exemple 9.1 :

Soit $u(x) = \frac{1}{x^2}$ et $v(x) = 4x - 5$.

1. Quel est l'ensemble de définition de $u \circ v$?
   $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}^*$.
   $v(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$.
   Donc $\mathcal{D}_{u \circ v} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{4}\right\}$.
2. Déterminer l'expression de $u \circ v$.
   $u \circ v(x) = u\big(v(x)\big) = \frac{1}{\big(v(x)\big)^2} = \frac{1}{(4x-5)^2}$.

2) Dérivée d'une composée

Propriété 9.1 – Dérivée d'une composée

Soit u une fonction définie et dérivable sur I et soit v une fonction définie et dérivable sur J, à valeurs dans I.
Alors $u \circ v$ est dérivable sur J et pour tout $x \in J$:

$$(u \circ v)'(x) = v'(x) \times (u' \circ v)(x)$$

Propriété 9.2 – Cas particuliers

Fonction	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
e^u	$\mathcal{D}_{u'}$	$u'e^u$
u^n, $n \in \mathbb{N}$	$\mathcal{D}_{u'}$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$	$-\frac{u'}{u^2}$

Exemple 9.2 :

Soit $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$.

1. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ? $f(x) = u \circ v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$.
   u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v est dérivable sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $[0;+\infty[$.
   Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
2. Calculer $f'(x)$

On a : $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(x) \times u' \circ v(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

II. Convexité

1) Dérivée seconde

Définition 9.2 – Dérivée seconde

Soit f une fonction définie et dérivable sur I, de dérivée f' dérivable sur I.
On appelle **dérivée seconde de f sur I** la dérivée de f', notée f''.

Exemple 9.3 :

Soit $f : x \mapsto 3x^3 - 5x + 6$.
Calculer $f''(x)$.
$f'(x) = 9x^2 - 5$.
$f''(x) = 18x$.

2) Fonction convexe/concave sur un intervalle

Définition 9.3 – Corde

On appelle **corde** tout segment reliant deux points d'une courbe.

Illustration

a) Fonction convexe et cordes

Définition 9.4 – Fonction convexe

Soit f une fonction fonction définie sur I.

1. f est **convexe sur I** si sa courbe représentative est située en dessous de chacune de ses cordes.
2. f est **concave sur I** si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses cordes.

Illustration

Exemple 9.4 :

La fonction carré est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}$?

La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Fonction convexe et tangentes

Définition 9.5 – Fonction convexe et tangentes

Soit f une fonction définie et dérivable sur I.

1. f est **convexe sur I** si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangents.
2. f est **concave sur I** si sa courbe représentative est située en dessous de chacune de ses tangentes.

Illustration

c) Propriétés

Propriété 9.3

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I.
2. f' est **croissante** sur I.
3. f'' est **positive** sur I.

Démonstration

Démontrons que si f'' est positive sur I, alors f est convexe sur I.
Pour cela, démontrons qu'alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
Soit $a \in I$ un réel.
Notons T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.
L'équation de T est $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.
$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.
$f(x) \geq f'(a) + f'(a)(x-a) \Leftrightarrow f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \geq 0$.
Notons g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$.

Pour tout $x \in I$, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$, et $g''(x) = f''(x) > 0$.
g' est donc croissante.

- Si $x \geq a$, alors $g'(x) \geq g'(a)$. Or $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$.
  Donc $g'(x) > 0$ et ainsi g est croissante.
  Donc $g(x) \geq g(a)$. Or $g(a) = f(a) - f(a) - f'(a)(a-a) = 0$.
  Donc $g(x) \geq 0$.
- Si $x < a$, alors $g'(x) < g'(a)$. Or $g'(a) = 0$.
  Donc $g'(x) < 0$ et ainsi g est décroissante.
  Donc $g(x) > g(a)$. Or $g(a) = 0$.
  Donc $g(x) > 0$.

Ainsi, pour tout $x \in I$, $g(x) \geq 0$.
Donc $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de ses tangentes sur I et ainsi g est convexe sur I. □

3) Point d'inflexion

Définition 9.6 – Point d'inflexion

Soit f une fonction définie et dérivable sur I.
Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

Remarque(s) :

- Il s'agit d'un point en lequel la convexité de la fonction change.

Illustration

Propriété 9.4

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I.
$\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si **f'' s'annule et change de signe en a**.

Exemple 9.5 :

Soit $f : x \mapsto x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 5x + 1$.

1. Sur quel(s) intervalle(s) f est-elle convexe ?

2. Déterminer le(s) point(s) d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

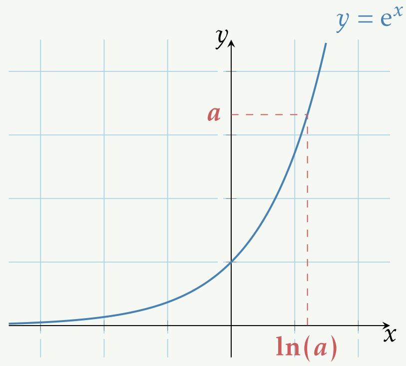
Rappel

- La fonction exponentielle est continue et strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e^x > 0}$.

I. Introduction

Définition 10.1 – Logarithme népérien

Soit a un réel strictement positif.
On appelle **logarithme népérien de a**, noté $\mathbf{ln(a)}$, l'unique solution de l'équation $e^x = a$.



Remarque(s) :

- Cette solution existe et est unique d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que nous avons vu. En effet, $x \mapsto e^x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
- On peut aussi formuler ainsi la définition : $x = \ln(a) \Leftrightarrow e^x = a$.

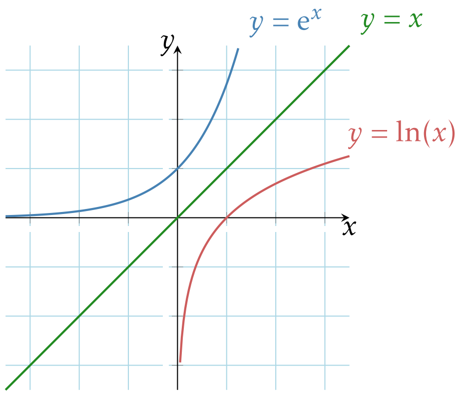
Définition 10.2 – Fonction logarithme népérien

La **fonction logarithme népérien**, notée **ln**, est la fonction :

$$\begin{aligned} \ln :]0;+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x). \end{aligned}$$

Remarque(s) :

- Les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont **réciproques** l'une de l'autre.
- Les courbes représentatives de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Propriété 10.1 – Conséquences

1. (a) $\mathbf{\ln(1) = 0}$. (b) $\mathbf{\ln(e) = 1}$. (c) $\mathbf{\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1}$
2. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\mathbf{e^{\ln(x)} = x}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{\ln(e^x) = x}$.

Exemple 10.1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x-5} = 3$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{2x-5} = 3 &\Leftrightarrow 2x - 5 = \ln(3) \\ &\Leftrightarrow 2x = \ln(3) + 5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln(3) + 5}{2} \end{aligned}$$

$\frac{\ln(3)+5}{2} \approx 3{,}05$.

II. Propriétés algébriques du logarithme

Théorème 10.1 – Relation fonctionnelle

Pour tout $(a;b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$:

$$\mathbf{\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$$

Corollaire 10.2

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a;b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

1. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \mathbf{-\ln(a)}$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \mathbf{\ln(a) - \ln(b)}$
3. $\ln(a^n) = \mathbf{n\ln(a)}$
4. $\ln(a^{-n}) = \mathbf{-n\ln(a)}$
5. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \mathbf{\frac{1}{2}\ln(a)}$.

Exemple 10.2 :

Démontrer que $\ln(40) = 3\ln(2) + \ln(5)$.

$$\begin{aligned}\ln(40) &= \ln(8 \times 5)\\ &= \ln(8) + \ln(5)\\ &= \ln\left(2^3\right) + \ln(5)\\ &= 3\ln(2) + \ln(5)\end{aligned}$$

III. Étude de la fonction logarithme népérien

1) Dérivée et variations

Propriété 10.3 – Dérivée de la fonction logarithme népérien

Soit $f : x \mapsto \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Démonstration

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\ln(x)} - x$.
On a $f(x) = x - x = 0$.
Par ailleurs : $f'(x) = \ln'(x)\mathrm{e}^{\ln(x)} - 1 = \ln'(x)x - 1$.
Or comme $f(x) = 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$, f est constante et donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

$$\begin{aligned}\ln'(x)x - 1 = 0 &\Leftrightarrow \ln'(x)x = 1\\ &\Leftrightarrow \ln'(x) = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

□

Propriété 10.4 – Sens de variations

La fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur son ensemble de définition.

Démonstration

Soit $f : x \mapsto \ln(x)$ définie sur $]0;+\infty[$.
Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.
Or pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$. □

Corollaire 10.5

1. Pour tous réels x et y strictement positifs :
   (a) $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
   (b) $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$
2. (a) Pour tout $x \in]0;1[$, $\ln(x) < 0$.
   (b) Pour tout $x \in]1;+\infty[$, $\ln(x) > 0$.

Exemple 10.3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $1{,}2^n > 1{,}85$.

$$\begin{aligned} 1{,}2^n > 1{,}85 &\Leftrightarrow \ln\left(1{,}2^n\right) > \ln(1{,}85) \\ &\Leftrightarrow n\ln(1{,}2) > \ln(1{,}85) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(1{,}85)}{\ln(1{,}2)} \quad (\text{car } \ln(1{,}2) > 0) \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}$: $S = \left]\frac{\ln(1{,}85)}{\ln(1{,}2)};+\infty\right[$.

Dans $\mathbb{N}$: $\frac{\ln(1{,}85)}{\ln(1{,}2)} \approx 3{,}37$.

Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 4.

Interprétation : il faut effectuer au moins 4 augmentations successives de 20% pour obtenir une augmentation globale supérieure strictement à 85%.

⚠ Le logarithme d'un nombre compris entre 0 et 1 est négatif ! Le sens de l'inégalité change ainsi lorsqu'on divise par un tel nombre.
Il faut donc être toujours vigilant lorsqu'on divise ou multiplie les membres d'une inégalité par un logarithme.

2) Limites

a) Limites en 0 et $+\infty$

Propriété 10.6 – Limites de la fonction logarithme népérien

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

b) Croissance comparée

Théorème 10.2 – Croissance comparée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

Démonstration

Démontrons que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$.
Posons $X = \ln(x)$.
Notons qu'alors $x = \mathrm{e}^X$.
On a alors :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) &= \lim_{X\to -\infty} \mathrm{e}^X \ln\left(\mathrm{e}^X\right) \\ &= \lim_{X\to -\infty} \mathrm{e}^X X \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Exemple 10.4 :

Soit $f : x \mapsto x\ln(x)$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
   f est définie sur $]0;+\infty[$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
   $f(x) = u(x)v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \ln(x) \geq -1 \\ &\Leftrightarrow e^{\ln(x)} \geq e^{-1} \qquad (*) \\ &\Leftrightarrow x \geq e^{-1} \end{aligned}$$

(*) car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Ainsi :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

On complète le tableau :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$.
- $f\left(e^{-1}\right) = e^{-1}\ln\left(e^{-1}\right) = e^{-1} \times -1 = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3) Logarithme et composition

Propriété 10.7

Soit u une fonction définie et dérivable sur I et à valeurs dans $]0;+\infty[$.
Soit $f : x \mapsto \ln\big(u(x)\big)$, définie sur I.

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Remarque(s) :

- Pour tout x, $u(x) > 0$. Donc le signe de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ ne dépend que du signe de $u'(x)$.
  Autrement dit, $\ln u$ a le même sens de variation que la fonction u.

Rappel

1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
2. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère **orthonormé**. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

3. Un vecteur **normal** à un plan $\mathcal{P}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.
4. On appelle **projeté orthogonal** de A sur un plan $\mathcal{P}$, le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par A.
5. Le projeté orthogonal H d'un point A sur un plan $\mathcal{P}$ (resp. sur une droite Δ) est le point de $\mathcal{P}$ (resp. de Δ) le plus proche de A, et on définit ainsi :

$$d(A,\mathcal{P}) = AH \quad (\text{resp. } d(A,\Delta) = AH)$$

I. Représentation paramétrique d'une droite

On se place dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Propriété 11.1

Soit d une droite passant par un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Alors :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Démonstration

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in d$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, i.e si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Or :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - x_A = ta \\ y_M - y_A = tb \\ z_M - z_A = tc \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

□

Remarque(s) :

- Autrement dit, les points d'une droite s'obtiennent tous en partant d'un point de cette droite, puis en effectuant t translations de vecteur $\vec{u}$.
- Cela traduit le fait que pour décrire une droite de l'espace, il suffit d'un point et d'une direction dans l'espace.

Définition 11.1 – Représentation paramétrique

Le système $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$ est appelé **représentation paramétrique de la droite d**.

Exemple 11.1 :

Soient $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de (AB).
   (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -\frac{3}{2} - (-2) \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$.
   Donc (AB) admet pour représentation paramétrique le système $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + \dfrac{1}{2}t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$.
2. En déduire l'intersection de (AB) avec le plan $\left(O; \vec{i}, \vec{k}\right)$.
   Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le point d'intersection de (AB) avec le plan $\left(O; \vec{i}, \vec{k}\right)$.

$M \in (AB)$, donc $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + \dfrac{1}{2}t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$.

De plus, $M \in \left(O; \vec{i}, \vec{k}\right)$, donc $y = 0$.
Or : $y = 0 \Rightarrow -2 + \frac{1}{2}t = 0 \Rightarrow t = 4$.
On en déduit :

- $x = 1 + 2 \times 4 = 9$.
- $z = 4 - 2 \times 4 = -4$.

Donc M a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

II. Équation cartésienne d'un plan

On se place dans un repère **orthonormé** $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Théorème 11.1 – Équation cartésienne d'un plan dans l'espace

1. Tout plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet pour **équation cartésienne**

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}, \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

2. Réciproquement, pour tous réels a, b et c non tous nuls, l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration

1. Soit $\mathcal{P}$ le plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et passant par un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$.

   Pour tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

   Or :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 &\Leftrightarrow (x - x_A) \times a + \left(y - y_A\right)b + (z - z_A)c = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } d = -ax_A - by_A - cz_A \end{aligned}$$

2. Soit E l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non tous nuls.

Remarquons que $A\begin{pmatrix}-\frac{d}{a}\\0\\0\end{pmatrix}$ vérifie l'équation $ax+by+cz=0$.

Donc $A \in E$.

Nommons $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} &= \left(x-\left(-\frac{d}{a}\right)\right)\times a+(y-0)\times b+(z-0)\times c\\ &= ax+bx+cz+d\\ &= 0 \quad \text{(par définition du point } M\text{)}\end{aligned}$$

On en déduit que E est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

□

Exemple 11.2 :

Soient $A\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}$ la droite dont on donne une représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=3+t\\y=-1-t\\z=2-2t\end{cases}$$

On cherche à calculer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$.
Pour cela, on va déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{D}$.
H est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan $\mathcal{P}$, orthogonal à $\mathcal{D}$ passant par A.

1. Déterminer un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
   Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$.
   À la lecture de la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$, on en déduit que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
2. En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
   Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme $x-y-2z+d=0$.
   Or $A \in \mathcal{P}$. Ses coordonnées vérifient donc l'équation $x-y-2z+d=0$.
   $x_A-y_A-2z_A+d=0 \Rightarrow -2-3-8+d=0 \Rightarrow d=13$.
   Donc $x-y-2z+13=0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
3. Déterminer les coordonnées de H.
   $H \in \mathcal{P}$ et $H \in \mathcal{D}$, donc ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases}x=3+t\\y=-1-t\\z=2-2t\\x-y-2z+13=0\end{cases}$$

On en déduit : $3+t-(-1-t)-2(2-2t)+13=0$.

$$\begin{aligned} 3+t-(-1-t)-2(2-2t)+13=0 &\Leftrightarrow 6t+13=0 \\ &\Leftrightarrow t=-\frac{13}{6} \end{aligned}$$

On en déduit :

- $x=3-\frac{13}{6}=\frac{5}{6}$
- $y=-1+\frac{13}{6}=\frac{7}{6}$.
- $z=2+2\times\frac{13}{6}=\frac{38}{6}=\frac{19}{3}$.

Donc $H\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\ \frac{7}{6}\\ \frac{19}{3}\end{pmatrix}$.

4. En déduire la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$.
   On en déduit :

$$\begin{aligned} d(A,\mathcal{D}) &= AH \\ &= \sqrt{\left(\frac{5}{6}-(-2)\right)^2+\left(\frac{7}{6}-3\right)^2+\left(\frac{19}{3}-4\right)^2} \\ &\approx 4{,}1 \end{aligned}$$

Propriété 11.2 – Orthogonalité de deux plans

Deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont orthogonaux si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

I. Définition et premières propriétés

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 12.1 – Équation différentielle

On appelle **équation différentielle** une équation dont l'inconnue est **une fonction**.

Définition 12.2 – Primitive

Soit f une fonction définie sur I.
On appelle **primitive** de f sur I une fonction F dérivable sur I et solution de l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = f}$.

Remarque(s) :

- Une primitive de f est donc une fonction F telle que $F'(x) = f(x)$.

Propriété 12.1

Si F est une primitive de f sur I, alors pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction $\boldsymbol{x \mapsto F(x) + C}$ est aussi une primitive de f sur I.

Remarque(s) :

- Si f admet une primitive sur I, alors f admet ainsi une infinité de primitives, qui ne diffèrent que d'une constante.

Propriété 12.2 – Unicité sous condition initiale

Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
L'équation différentielle $y' = f$ admet **une unique solution** F telle que $\boldsymbol{F(x_0) = y_0}$.

Remarque(s) :

- $F(x_0) = y_0$ est appelée **condition initiale**.

Exemple 12.1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 4x$.
   Les solutions de $y' = 4x$ sont les fonctions définies par $y(x) = 2x^2 + C$, avec $C \in \mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors bien $y'(x) = 2 \times 2x + 0 = 4x$.
2. Déterminer l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 5$.
   F est solution de l'équation différentielle $y' = 4x$.
   Donc $F(x)$ est de la forme $2x^2 + C$.
   $F(1) = 5 \Leftrightarrow 2 \times 1^2 + C = 5 \Leftrightarrow 2 + C = 5 \Leftrightarrow C = 3$.
   Donc $F : x \mapsto 2x^2 + 3$ est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 5$.

II. Calcul de primitives

1) Primitives usuelles

Propriété 12.3 – Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau ci-dessous, C est un réel quelconque.

$f(x)$	$F(x)$	I
x^n, avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\boldsymbol{\dfrac{x^{n+1}}{n+1}}$	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$.
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\boldsymbol{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
e^x	$\boldsymbol{\mathrm{e}^x}$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\boldsymbol{-\cos(x)}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\boldsymbol{\sin(x)}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\boldsymbol{\ln(x)}$	$\mathbb{R}_+^*$

Remarque(s) :

- Toutes les primitives sont indiquées à une constante près.
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet $x \mapsto \ln|x|$ pour primitive de manière générale. En particulier, une primitive sur $\mathbb{R}_-^*$ est ainsi $\ln(-x)$.

Propriété 12.4

Soient F et G, primitives respectives de f et g sur I.

- $f + g$ admet pour primitive $\boldsymbol{F + G}$ sur I.
- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, kf admet pour primitive $\boldsymbol{kF}$ sur I.

Exemple 12.2 :

Dans chacun des cas, déterminer une primitive F de f sur I.

1. $f(x) = x^3 - 5x$; $I = \mathbb{R}$.

   $F(x) = \frac{x^4}{4} - 5 \times \frac{x^2}{2} = \boxed{\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{5x^2}{2}}$.
2. $f(x) = -\frac{3}{x^3}$; $I =]0;+\infty[$.

   $F(x) = -3 \times \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = \boxed{\dfrac{3}{2x^2}}$.
3. $f(x) = 6\,\mathrm{e}^x - \frac{5}{2\sqrt{x}}$; $I =]0;+\infty[$.

   $\boxed{F(x) = 6\,\mathrm{e}^x - 5\sqrt{x}}$.

2) Primitives et composition de fonctions

Propriété 12.5 – Primitives et composées de fonctions

Soit u une fonction dérivable sur I.

$f(x)$	$F(x)$	Conditions
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$	$u(x) \neq 0$
$u'(x)[u(x)]^n$	$\frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1}$	• $n \neq -1$ • $u(x) \neq 0$ si $n < 0$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$	$u(x) > 0$
$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$	

Exemple 12.3 :

Dans chacun des cas, déterminer une primitive F de f sur I.

1. $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$; $I = \mathbb{R}$.
   $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \times u'(x)[u(x)]^{-2}$, avec $u(x) = x^2 + 1$.
   On en déduit :
   $$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{[u(x)]^{-1}}{-1} \\ &= \boxed{-\frac{1}{2(x^2+1)}} \end{aligned}$$

2. $f(x) = (4x+5)\left(2x^2+5x-8\right)^3$; $I = \mathbb{R}$.
   $f(x) = u'(x)[u(x)]^3$ avec $u(x) = 2x^2 + 5x - 8$.
   Donc :
   $$\begin{aligned} F(x) &= \frac{[u(x)]^4}{4} \\ &= \boxed{\frac{\left(2x^2+5x-8\right)^4}{4}} \end{aligned}$$

3. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}$; $I = \mathbb{R}$.
   $f(x) = \frac{5}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{5}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) = x^2 + 1$.
   Ainsi :
   $$\begin{aligned} F(x) &= \frac{5}{2} \times 2\sqrt{u(x)} \\ &= \boxed{5\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

4. $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x^3}$; $I = \mathbb{R}$.
   $f(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2\,\mathrm{e}^{x^3} = \frac{1}{3}u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = x^3$.
   Ainsi :
   $$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{u(x)} \\ &= \boxed{\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{x^3}} \end{aligned}$$