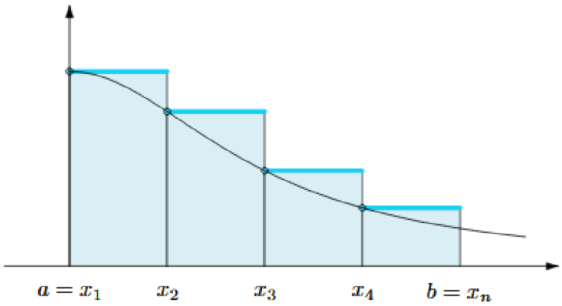
Méthode des rectangles

La méthode des rectangles pour le calcul de l'intégrale

$$I(f,a,b)=\int_a^b f(t)\,dt$$

est décrite par le graphique suivant



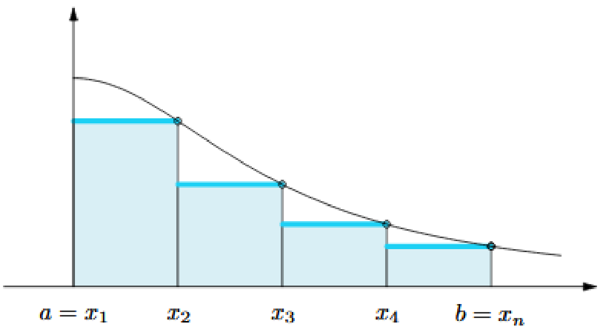
La valeur de l'intégrale est approchée par la somme des aires des rectangles qui sont de hauteur $f(x_i)$ et de largeur $x_{i+1}-x_i$ pour $i\in[1,n-1]$. On obtient donc l'intégrale approchée

$$R_g(f,a,b,n)=\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\,(x_{i+1}-x_i)$$

Les points x_i sont les bornes d'un découpage de l'intervalle $[a,b]$ en $n-1$ intervalles qu'on prend généralement de même longueur, c'est à dire la longueur

$$h=\frac{b-a}{n-1}=x_{i+1}-x_i \qquad \text{on a} \qquad x_i=a+(i-1)\,h,\quad \forall i\in[1,n]$$

La méthode des rectangles à droite est une variation sur la même idée. Le dessin suivant montre son fonctionnement

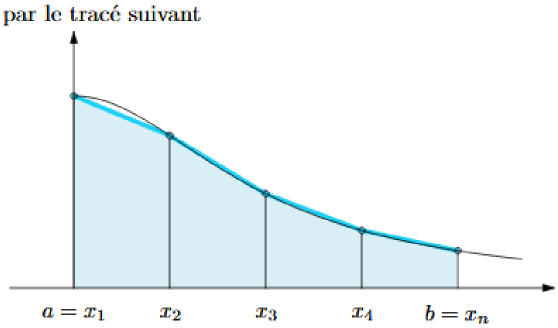


La formule d'approximation est cette fois

$$R_d(f,a,b,n)=\sum_{i=2}^{n} f(x_i)\,(x_{i+1}-x_i)$$

Méthode des trapèzes

Cette méthode est décrite par le tracé suivant



L'intégrale est approchée par la somme des aires de *trapèzes* obtenus en reliant les points $[x_i, f(x_i)]$ situés sur la courbe, ce qui donne la formule d'approximation de l'intégrale

$$T(f,a,b,n)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\,(x_{i+1}-x_i)$$

Exercice :

1) Écrire un script scilab qui prend qui demande à l'utilisateur a,b et n et affiche le vecteur des abscisses ($x_{1,} \dots, x_n$) si le découpage est régulier.
2) Construire une fonction scilab pour la fonction f définie par f(x)= $4/(1+x^2)$.
3) Calculer l'intégrale de f entre 0 et 1
4) Construire un programme scilab qui prend en entrée un entier n et affiche en sortie l'approximation de l'intégrale de f entre 0 et 1 par la méthode des rectangles à gauche.
5) Compléter le programme pour qu'il affiche la valeur de l'écart entre l'approximation et la valeur exacte.
6) Faire de même avec la méthode des rectangles à droite et la méthode des trapèzes.
7) Afficher sur un même graphe les valeurs de l'écart pour les trois méthodes en fonction de n . Qu'en pensez vous ?

Pour finir, construire une fonction scilab qui prend en entrées a,b,n et une fonction f et donne en sortie les valeurs des l'approximation pour les trois méthodes.