Lundi 03/01 :

1. Justifier que la fonction suivante est continue dérivable en 0, $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{ln(1+x^2)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$
2. Donner les puissances de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
3. On admet que la fonction f définie par $f(x) = x + ln(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner $(f^{-1})'(e+1)$.
4. On considère une fonction f dérivable sur $[0,1]$ tels que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0; \frac{1}{n}]$, $|f'(x)| \leqslant \sqrt{n}$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(0) - f(1/n)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(1/n) = f(0)$. Pourquoi était ce évident ?

Mardi 04/01 :

1. Soit $\{A_1, ..., A_n\}$ un système complet d'événements. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(A_i) = \frac{a}{i}$, pour tout $i \in [[1,n]]$. Trouver a.
2. On considère une fonction $f \in C^1(]0,1])$ et $f(0) = 0$. On suppose que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Enfin, on suppose que pour tout $x \in]0,1]$, $|f'(x)| \leqslant x$, justifier avec le th. de la limite de la dérivée que $f \in C^1([0,1])$.
3. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto arctan(e^x) + arctan(e^{-x})$. Que peut on en déduire ? Même question sur $g : x \mapsto arctan(x^2) + arctan(\frac{1}{x^2})$.
4. Justifier à l'aide d'une inclusion que $P(\bar{A} \cap B) \leqslant P(B)$. Justifier que $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(A \cup B) - P(B) - P(A) + 1$.