Remédiations variables aléatoires et lois finies

Exercice 1 - Loi d'un dé truqué

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Exercice 2 - En plein dans le mille!

Un joueur tire sur une cible de 10cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons 1,2, ..., 10 cm, et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la cible.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Le joueur gagne k euros s'il atteint la couronne numérotée k pour k compris entre 6 et 10, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 3 - Plus grand nombre tiré

On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Exercice 4 - Garagiste

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X = 0) = 0,1 \quad P(X = 1) = 0,3 \quad P(X = 2) = 0,4 \quad P(X = 3) = 0,2.$$

1. On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z. On pourra considérer dans la suite que X et Z sont indépendantes.
2. On note Y la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice 5 - Vaches laitières

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité $p = 0,15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :

- Première méthode : On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.
- Deuxième méthode : On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on effectue une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (=celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyse). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n, et montrer que son espérance vaut : $1 + \frac{1}{n} - (0.85)^n$.
2. Etudier la fonction $f(x) = ax + \ln x$, pour $a = \ln(0,85)$. Donner la liste des entiers n tels que $f(n) > 0$.
3. Montrer que $f(n) > 0$ équivaut à $E(Y_n) < 1$. En déduire la réponse (en fonction de n) à la question posée.

Exercice 6 - Trouver le paramètre d'une loi uniforme connaissant son espérance

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, a\}$, où $a \in \mathbb{N}$. On suppose que $E(X) = 6$. Déterminer a.

Exercice 7 - Lancer de pièces

On lance n fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces.

Exercice 8 - Uniformément uniforme

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k. On choisit d'abord une urne, puis une boule dans cette urne, et on note Y la variable aléatoire du numéro obtenu. Quelle est la loi de Y? Son espérance?

Exercice 9 - Le restaurateur

Un restaurateur accueille chaque soir 70 clients. Il sait qu'en moyenne, deux clients sur cinq prennent une crème brûlée. Il pense que s'il prépare 30 crèmes brûlées, dans plus de 70% des cas, la demande sera satisfaite.

1. A-t-il raison?
2. Combien de crèmes brûlées doit-il fabriquer au minimum pour que la demande soit satisfaite dans au moins 90% des cas.

Exercice 10 - Code de la route!

L'examen du code de la route se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen. Il arrive qu'il connaisse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées. On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la vraie réponse est p. On note, pour $1 \leq i \leq 40$, A_i l'événement : "le candidat donne la bonne réponse à la i-ème question". On note S la variable aléatoire égale au nombre total de bonnes réponses.

1. Calculer $P(A_i)$.
2. Quelle est la loi de S (justifier!)?
3. A quelle condition sur p le candidat donnera en moyenne au moins 36 bonnes réponses?

Exercice 11 - Méthode du maximum de vraisemblance

Un étang contient des brochets et des truites. On note p la proportion de truites dans l'étang. On souhaite évaluer p. On prélève 20 poissons au hasard. On suppose que le nombre de poissons est suffisamment grand pour que ce prélèvement s'apparente à 20 tirages indépendants avec remise. On note X le nombre de truites obtenues.

1. Quelle est la loi de X?

2. Le prélèvement a donné 8 truites. Pour quelle valeur de p la quantité $P(X = 8)$ est-elle maximale?

Exercice 12 - QCM

Un examen consiste en un QCM de 15 questions. Pour chaque question, 3 réponses sont possibles. Les étudiants répondent à chaque question indépendamment. L'enseignant estime que les étudiants ayant préparé l'examen sont 70% et répondent à une question correctement avec probabilité 0,8. Les autres étudiants choisissent les réponses au hasard. Il faut au moins 8 bonnes réponses pour réussir l'examen.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant, choisi au hasard, réussisse l'examen?

2. Si un étudiant échoue, quelle est la probabilité qu'il ait préparé l'examen?

Exercice 13 - Maximum d'une loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Pour quelle(s) valeur(s) de k la probabilité $p_k = P(X = k)$ est maximale?

Exercice 14 - Une autre expression de l'espérance

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, N\}$. Démontrer que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n).$$

Exercice 15 - Au carré

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini. Démontrer que $E(X)^2 \leq E(X^2)$.

Exercice 16 - Maximiser l'espérance

Soit $n \geq 2$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, et suivant la loi uniforme discrète sur $\{1, 2, \dots, n\}$. On considère a un entier de $\{1, 2, \dots, n\}$, et Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Y (vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité).

2. Calculer l'espérance de Y et la comparer à l'espérance de X_1.

3. Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle maximale?

Vous avez accès aux corrigés de cette feuille par l'url :
http://www.bibmath.net/ressources/justeunefeuille.php?id=21990