Remédiations suites numériques

Exercice 1 - Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos\left(n^2\right)}{\sqrt{n}}$ **2**. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

3. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$ **4**. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

5. $u_n = 3^n e^{-3n}$.

Exercice 2 - Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^2}$ **2**.$u_n = e^{-\sqrt{n}} \ln(1 + n + e^n)$

3. $u_n = \sqrt{n} \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)$

Exercice 3 - Un résultat de croissance comparée

Le but de l'exercice est de démontrer un résultat de croissance comparée : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{n}{2^n}$ tend vers 0. On note, pour $n \geq 0$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. Démontrer que (v_n) converge vers 1/2.
2. En déduire qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}.$$
3. Démontrer que, pour tout $n \geq n_0$, on a
$$u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} u_{n_0}.$$
4. En déduire que (u_n) tend vers 0.

Exercice 4 - Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n}$ **2**. $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n^\alpha}$ en fonction de $x, \alpha \in \mathbb{R}$

3. $u_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$

Exercice 5 - Un produit

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

On pose $v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer, pour tout $x \geq 0$, l'inégalité
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$
2. En déduire que
$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$
On admettra que
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. Montrer que (v_n) converge, et préciser sa limite.
4. Montrer que (u_n) converge, et préciser sa limite.

Exercice 6 - Exemple de suites adjacentes

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes.

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

Exercice 7 - Suites adjacentes et récurrence croisée

Soit a et b deux réels strictement positifs avec $a < b$. Soit (u_n) et (v_n) les deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour $n \geq 0$,
$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$
1. Déterminer u_1 et v_1.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n.$$
3. Démontrer que $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique de raison $1/3$. En déduire que $(v_n - u_n)$ tend vers 0.
4. Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
5. Démontrer que la suite $(u_n + v_n)$ est une suite constante.
6. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 8 - Série alternée

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$. Etudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Quelle est la nature de (u_n)?

Exercice 9 - Suite homographique

Soit la suite réelle (u_n) définie par
$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$
Pour $x \neq -1$, on pose $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$.

1. Étudier les variations de f sur $[1, +\infty[$.

2. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n > 1$.

3. On définit une suite (v_n) à partir de (u_n) en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique, et donner l'expression de son terme général.

4. En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

5. Justifier enfin que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 10 - Une suite récurrente

Soit u la suite définie par $u_0 \in]0, 1]$ et par la relation de récurrence
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}.$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n \leq 1$.

2. Démontrer que la suite est monotone.

3. En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11 - Suite récurrente et fonction logarithme

On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln x$. Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 \geq 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que la suite est bien définie et qu'elle est minorée par 1.

2. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1, +\infty[$.

3. Étudier la monotonie de u.

4. En déduire que (u_n) est convergente, et donner sa limite.

Exercice 12 - Suite récurrente et fonction logarithme

On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln x$. Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 \geq 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que la suite est bien définie et qu'elle est minorée par 1.

2. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1, +\infty[$.

3. Étudier la monotonie de u.

4. En déduire que (u_n) est convergente, et donner sa limite.

Exercice 13 - Fonction décroissante - avec indications

Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite récurrente (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $[1, 3]$ et montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f. Que peut-on en déduire sur (u_n)?

2. Soient (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) est croissante.
3. Démontrer que (w_n) est décroissante.
4. En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.
5. Quelle est la nature de la suite (u_n)?

Exercice 14 - Fonction décroissante et deux suites extraites qui ne convergent pas vers la même limite

Soit $f(x) = (1-x)^2$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que $[0,1]$ est stable par f. Quel est le sens de variation de f sur $[0,1]$?
2. On pose $g = f \circ f$. Quel est le sens de variation de g sur $[0,1]$?
3. Résoudre l'équation $g(x) = x$.
4. Pour $n \geq 0$, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, de sorte que $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$. Démontrer que (v_n) est croissante, et déterminer sa limite. Démontrer que (w_n) est décroissante, et déterminer sa limite.
5. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n)?

Exercice 15 - Approximation du nombre d'or

On appelle nombre d'or et on note ϕ la solution positive réelle de l'équation d'inconnue réelle x :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

En particulier, on a $\phi = \sqrt{1+\phi}$.

1. Justifier, sans calculatrice, que $1 < \phi < 2$.
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

   et ainsi de suite,

$$u_n = \sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

   avec n radicaux.
   Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$1 \leq u_n \leq \phi.$$
4. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
5. Démontrer que (u_n) converge vers ϕ.
6. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$
7. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
$$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Exercice 16 - Méthode de Théon de Smyrne

On définit deux suites (x_n) et (y_n) par leur premier terme $x_0 = y_0 = 1$ et par les relations de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + 2y_n \\ y_{n+1} & = & x_n + y_n. \end{array}\right.$$

1. Justifier que les suites (x_n) et (y_n) sont à termes strictement positifs.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $\frac{x_n}{y_n} \geq 1$.
3. Démontrer que, pout tout $n \geq 0$,

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\frac{x_n}{y_n}+1}\left(\sqrt{2} - \frac{x_n}{y_n}\right).$$

4. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\sqrt{2} - \frac{x_n}{y_n}\right|.$$

5. En déduire que

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{2}-1).$$

6. En déduire un algorithme donnant une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.

Exercice 17 - Une variation sur les suites adjacentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels possédant les propriétés suivantes :

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq u_n \leq v_n$.
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

1. Démontrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes. On note ℓ et ℓ' leurs limites respectives.
2. Démontrer que $\ell = \ell'$.
3. Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes?