Remédiations nombres réels

Exercice 1 - Pour réviser...

Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et x/y sachant que $x \in [3,6]$ et $y \in [-4,-2]$.

Exercice 2 - Somme, produit, carré

Soit a,b,c trois nombres réels.

1. Démontrer que $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
2. Démontrer que $ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2$.
3. Démontrer que $3ab+3bc+3ac \leq (a+b+c)^2$.

Exercice 3 - Une équation avec des racines carrées

Déterminer les réels x tels que $\sqrt{2-x}=x$.

Exercice 4 - Maximum et valeur absolue

Soient x et y deux nombres réels. Démontrer que

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

$$\min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

Exercice 5 - Équation avec des valeurs absolues

On cherche à résoudre l'équation

$$|2x-4| = |x+3|.$$

1. On suppose $x \geq 2$. Simplifier $|2x-4|$ et $|x+3|$. En déduire les solutions de l'équation dans l'intervalle $[2,+\infty[$.
2. On suppose que $x \in [-3,2[$. Simplifier $|2x-4|$ et $|x+3|$. En déduire les solutions de l'équation dans cet intervalle.
3. On suppose que $x < -3$. Simplifier $|2x-4|$ et $|x+3|$. En déduire les solutions de l'équation dans cet intervalle.
4. Conclure.

Exercice 6 - Une inégalité

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2-x+1$.

Exercice 7 - Inégalité avec un maximum et des valeurs absolues

Soit x,y deux réels non nuls. Démontrer que

$$\max(|x|,|y|)\left|\frac{x}{|x|}-\frac{y}{|y|}\right| \leq 2|x-y|.$$

Exercice 8 - Partie entière du successeur

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercice 9 - Produit et division

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 10 - Somme et somme des carrés

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels. Exprimer $\sum_{k=1}^n (1-a_k)^2$ en fonction de $\sum_{k=1}^n a_k$ et de $\sum_{k=1}^n a_k^2$.
2. On note
$$E_n = \left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists (a_k)_{k \in \{1,\dots,n\}} \in \mathbb{R}^n;\ x = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k^2 \right\}.$$
E_n est-il majoré? E_n est-il minoré? Possède-t-il un plus grand élément? Un plus petit élément?