Remediations matrices

Exercice 1 - Produits possibles

On considère les matrices suivantes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles? Quelles sont les matrices carrées et les matrices symétriques?

Exercice 2 - Des calculs de produits

Calculer lorsqu'ils sont définis les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3 - Identité remarquable

Soit $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. Puis comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2 + AB + BA + B^2$.

Exercice 4 - Commutant d'une matrice fixée

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 5 - Produit et trace

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\mathrm{tr}(AA^T) = 0$. Que dire de la matrice A?
2. On suppose que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$. Démontrer que $A = B$.

Exercice 6 - Puissance n-ième, par récurrence

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, A^3. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 1$. Répondre aux mêmes questions pour B.

Exercice 7 - Puissance k-ième sans division euclidienne

Soit U la matrice
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer U^2 et en déduire une relation simple liant U^2, U et I_4.
2. Soit (α_k) et (β_k) les suites définies par $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\alpha_{k+1} = 3\beta_k$, $\beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k$. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$U^k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}.$$
3. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\beta_{k+2} = 2\beta_{k+1} + 3\beta_k$.
4. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\beta_k = \frac{3^k - (-1)^k}{4}$ et $\alpha_k = \frac{3^k + 3(-1)^k}{4}$.

Exercice 8 - Calcul algébrique avec des inverses

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, supposées inversibles. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $(2I_n + B^{-1})B + A(B - A^{-1} + 2A^{-1}B) - AB$
2. $A(7I_n + A^{-1}) - B(5B^{-1}A + B^{-1} + A) + A(B - 2I_n)$

Exercice 9 - Annulateur

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB, AC. Que constate-t-on? La matrice A peut-elle être inversible? Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle).

Exercice 10 - Inverser une matrice sans calculs!

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 11 - Application à l'étude de suites récurrentes

On considère les matrices
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que P est inversible, et déterminer son inverse.

2. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D.

3. Calculer D^n pour tout $n \geq 1$.

4. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$. On en déduit que pour tout entier n,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3\cdot 2^n} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3\cdot 2^n} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3\cdot 2^n} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\cdot 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{2}{3\cdot 2^n} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3\cdot 2^n} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\cdot 2^n} + \frac{1}{3} & \frac{1}{3\cdot 2^n} + \frac{1}{3} & -\frac{2}{3\cdot 2^n} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

   (on ne demande pas de faire le calcul, mais vous pouvez vérifier vos résultats en calculant quelques coefficients).

5. On considère les trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) définies par récurrence, pour u_0, v_0 et w_0 des réels, par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \dfrac{v_n + w_n}{2} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + w_n}{2} \\ w_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{array} \right.$$

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Quelle relation matricielle relie U_{n+1}, U_n et A? En déduire l'expression de U_n en fonction de A^n et de U_0.

6. Démontrer que les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) convergent, et en déduire leur limite.