Remédiations logique et raisonnement

Exercice 1 - Nécessaire ou suffisante?

On rappelle qu'un entier p divise n, et on note $p|n$, s'il existe un entier relatif k tel que $n = k \times p$.

1. Est-ce que $6|n$ est une condition nécessaire à ce que n soit pair?
2. Est-ce que $6|n$ est une condition suffisante à ce que n soit pair?

Exercice 2 - Beaucoup de bruit pour rien...

Parmi toutes les propositions suivantes, regrouper par paquets celles qui sont équivalentes :

1. Tu auras ton examen si tu travailles régulièrement.
2. Pour avoir son examen, il faut travailler régulièrement.
3. Si tu ne travailles pas régulièrement, tu n'auras pas ton examen.
4. Il est nécessaire de travailler régulièrement pour avoir son examen.
5. Pour avoir son examen, il suffit de travailler régulièrement.
6. Ne pas travailler régulièrement entraîne un échec à l'examen.
7. Si tu n'as pas ton examen, c'est que tu n'as pas travaillé régulièrement.
8. Travail régulier implique réussite à l'examen.
9. On ne peut avoir son examen qu'en travaillant régulièrement

Exercice 3 - Vraies ou fausses

Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

1. 136 est un multiple de 17 et 2 divise 167.
2. 136 est un multiple de 17 ou 2 divise 167.
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ (x+1=0\ \text{ et } x+2=0)$.
4. $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+1=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+2=0)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1 \neq 0 \text{ ou } x+2 \neq 0)$.
6. $\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0;$
7. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0;$
8. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0;$
9. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon;$
10. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ |a| < \varepsilon.$

Exercice 4 - Nier des assertions avec quantificateurs

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0.$

2. $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ f(x) > M.$

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \implies x \leq 0.$

4. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in I^2,\ \big(|x-y| \leq \eta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon\big).$

Exercice 5 - Vraies ou fausses

Soit n un entier naturel non nul. On note C_n la courbe d'équation $y = (1+x)^n$ et D_n la droite d'équation $y = 1 + nx$.

1. Rappeler l'équation de la tangente à C_n au point A de C_n d'abscisse 0.

2. Tracer (par exemple à l'aide d'un logiciel) C_n et D_n lorsque $n = 2, 3$.

3. En vous aidant du graphique pour obtenir une conjecture, démontrer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (1+x)^n \geq 1 + nx;$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ (1+x)^n \geq 1 + nx;$
   (c) $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (1+x)^n = 1 + nx;$
   (d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x \in \mathbb{R},\ (1+x)^n = 1 + nx;$
   (e) $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ (1+x)^n > 1 + nx.$

Exercice 6 - Du texte aux quantificateurs

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est constante;

2. f n'est pas constante;

3. f s'annule;

4. f est périodique.

Exercice 7 - Corps de nombres

On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

1. Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.

2. En déduire que si m, n, p et q sont des entiers relatifs, alors

$$m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \iff (m = p \text{ et } n = q).$$

Exercice 8 - Carré d'un entier

Soit $n > 0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 9 - Nombres dans un intervalle

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante : il y a deux de ces réels dont la distance est inférieure ou égale à $1/n$.

1. Ecrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété.

2. Ecrire la négation de cette formule logique.

3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (on pourra montrer que $x_n - x_0 > 1$).

4. Donnez-en une preuve en utilisant le principe des tiroirs.

Exercice 10 - Nombre fini de valeurs

Que dire d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle, continue, et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs?

Exercice 11 - Pour se mettre en confiance...

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 12 - Limite de validité

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante :

$$P_n : \; 2^n > n^2.$$

1. Montrer que l'implication $P_n \implies P_{n+1}$ est vraie pour $n \geq 3$.

2. Pour quelles valeurs de n la propriété P_n est vraie?

Exercice 13 - Une récurrence double

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

Exercice 14 - Suite doublement récurrente

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \; a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}. \end{array}\right.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

Exercice 15 - Partage de carrés

1. Démontrer qu'on peut partager un carré en 4 carrés, puis en 6 carrés, en 7 carrés, en 8 carrés.

2. Démontrer que si on peut partager un carré en n carrés, alors on peut le partager en $n+3$ carrés.

3. Démontrer qu'on ne peut pas partager un carré en 2 carrés, en 3 carrés, en 5 carrés.

4. Pour quelle(s) valeur(s) de n peut-on partager un carré en n carrés?

Exercice 16 - Une récurrence double

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = -1$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1 + n(n-1)$.

Exercice 17 - Paire et impaire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Démontrer que f s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et somme d'une fonction impaire.