Remédiations fonctions généralités

Exercice 1 - Ensembles de définition

Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $\sqrt{2x^2-12x+18}$ **2**. $\ln(x^2+4x+4)$
3. $\sqrt{\frac{8-16x}{(7+x)^2}}$ **4**. $\ln(3-x)+\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$.

Exercice 2 - Opérations sur la parité

Soit $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ des fonctions impaires. Que dire de la parité de $f+g$, $f\times g$ et $f\circ g$?

Exercice 3 - Fonction impaire et bijective

Soit I une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 et f bijective et impaire de I dans $J\subset\mathbb{R}$. Démontrer que f^{-1} est impaire. Peut-on remplacer impaire par paire dans cet énoncé?

Exercice 4 - Parité et fonction exponentielle

Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=e^x-e^{-x},\ f_2(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},\ f_3(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$

Exercice 5 - Périodique de période 2 et 3

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique admettant 2 et 3 comme période. Démontrer que f est 1-périodique.

Exercice 6 - Inégalités

Démontrer que, pour tout $x\geq 0$, on a

$$x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x.$$

Exercice 7 - Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes (on précisera le domaine de définition) :

1. $(2x-7)\ln(x+1)>0$ **2**. $\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right)\leq 0$.

Exercice 8 - Logarithme du milieu et milieu des logarithmes

Démontrer que, pour tous $x,y>0$, on a

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}.$$

Exercice 9 - Équation

Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$.

Exercice 10 - Simplifier!

Simplifier les expressions suivantes :

1. $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$; **2**. $\log_x\left(\log_x x^{x^y}\right)$

Exercice 11 - Étude de fonction et réciproque

Soit $f : [1,+\infty[\to [1,+\infty[$ définie par $f(x) = \exp(\ln^2 x)$. Démontrer que f est une bijection, et déterminer la bijection réciproque.

Exercice 12 - Etude de fonction et de la réciproque

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^x$.

1. Etudier les variations de f et ses limites en $\pm\infty$. Préciser la tangente à la courbe représentative de f en l'origine.
2. Démontrer que f induit une bijection h de $[-1,+\infty[$ sur $[-e^{-1},+\infty[$.
3. On note W l'application réciproque de h. Justifier que W est dérivable sur $]-e^{-1},+\infty[$ et vérifier que, pour $x \neq 0$,
$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}.$$

Exercice 13 - Dérivée de la bijection réciproque

Soit $f : [0;+\infty[\to [0;+\infty[$ définie par $f(x) = xe^x$. Démontrer que f est bijective. Calculer $(f^{-1})'(e)$.

Exercice 14 - Dérivée de la réciproque

Démontrer que les fonctions suivantes sont bijectives, et donner l'équation de la tangente à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 0$.

1. $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = -1 + e^{x-1} + \ln x$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + \sin^4 x$.