# Remediations ensembles et applications

Exercice 1 - Deux descriptions d'un même ensemble

Soit $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 4x-y=1\}$ et $C=\{(t+1,4t+3);\ t\in\mathbb{R}\}$. Démontrer que $A=C$.

Exercice 2 - Partie d'une union

Est-ce que $C\subset A\cup B$ entraîne $C\subset A$ ou $C\subset B$?

Exercice 3 - Trois ensembles

Soient $A,B,C$ trois ensembles tels que $A\cup B=B\cap C$. Montrer que $A\subset B\subset C$.

Exercice 4 - Retour sur la différence symétrique

Soit $E$ un ensemble et soient $A,B$ deux parties de $E$. On rappelle que la *différence symétrique* de $A$ et $B$ est définie par

$$A\Delta B=(A\cap\bar{B})\cup\left(\bar{A}\cap B\right)$$

où $\bar{A}$ (resp. $\bar{B}$) désigne le complémentaire de $A$ (resp. de $B$) dans $E$. Démontrer que $A\Delta B=B$ si et seulement si $A=\varnothing$.

Exercice 5 - Fonction caractéristique

Soit $A$ une partie d'un ensemble $E$. On appelle fonction caractéristique de $A$ l'application $f$ de $E$ dans l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$ telle que :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{si } x\notin A\end{cases}$$

Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$, $f$ et $g$ leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1-f$;
2. $fg$;
3. $f+g-fg$.

Exercice 6 - Ensemble des parties, intersection et réunion

Soient deux ensembles $E$ et $F$.

1. Soit $A$ une partie de $E\cap F$. $A$ est-elle une partie de $E$? de $F$? En déduire une comparaison de $\mathcal{P}(E\cap F)$ avec $\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)$.
2. Soit $B$ un ensemble qui est a la fois contenu dans $E$ et aussi dans $F$. $B$ est-il contenu dans $E\cap F$? En déduire une deuxième comparaison de $\mathcal{P}(E\cap F)$ avec $\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)$.
3. Démontrer que $\mathcal{P}(E)\cup\mathcal{P}(F)$ est inclus dans $\mathcal{P}(E\cup F)$.
4. Donner un exemple simple prouvant que l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie.

Exercice 7 - Composition itérée

Soit $f(x)=\frac{x}{x+1}$. Déterminer $f\circ f\circ\dots\circ f(x)$ (où le symbole $f$ apparaît $n$ fois) en fonction de $n\in\mathbb{N}^*$ et de $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 8 - Quelques exemples

Les fonctions suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n,\ \ f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ \ f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

$$f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2.$$

Exercice 9 - Encore des exemples

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$.
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$.

Exercice 10 - Avec des ensembles

Soit $E$ un ensemble. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ une partie de $E$, on note $\bar{A}$ son complémentaire. La fonction $\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $A \mapsto \bar{A}$ est-elle injective? surjective?

Exercice 11 - Une fonction homographique

Soit $g : [0;+\infty[ \to [0;1[$ définie par $g(x) = \frac{x}{1+x}$. Démontrer que $g$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 12 - Calcul de la réciproque

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque $f^{-1}$.

Exercice 13 - Composition, injectivité et surjectivité

On considère 4 ensembles $A, B, C$ et $D$, et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$. Montrer que

$$g \circ f \text{ injective} \implies f \text{ injective},$$

$$g \circ f \text{ surjective} \implies g \text{ surjective}.$$

Montrer que :

$$\big(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\big) \iff \big(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

Exercice 14 - Composition, injectivité et surjectivité

soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On note $h = g \circ f$ la composée.

1. On suppose $h$ injective et $f$ surjective. Montrer que $g$ est injective.
2. On suppose $h$ surjective et $g$ injective. Montrer que $f$ est surjective.

Exercice 15 - Ensembles et images directes

Soient $E$ et $F$ deux ensembles et soit $f : E \to F$. Soient également $A$ et $B$ deux parties de $E$.

1. Démontrer que $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$. La réciproque est-elle vraie?

2. Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie?
3. Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 16 - Caractérisations

Soient $X, Y$ deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que $f$ est injective si et seulement si, pour tout $g : Z \to X$ et tout $h : Z \to X$, on a $f \circ g = f \circ h \implies g = h$.
2. Montrer que $f$ est surjective si et seulement si, pour tout $g : Y \to Z$ et tout $h : Y \to Z$, on a $g \circ f = h \circ f \implies g = h$.