Remediations derivations des fonctions reelles

Exercice 1 - Dérivable ou pas dérivable

Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0?

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad g(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}, \qquad h(x) = |x|\sin x.$$

Exercice 2 - Raccordement

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $f(0) = f(1)$ avec f' continue en 0 et en 1. On définit g sur $[0,1]$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

g est-elle continue? dérivable? Si non, quelle(s) hypothèse(s) faut-il ajouter pour que ce soit le cas?

Exercice 3 - Accroissements finis et inégalités

Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y|$.
2. $\forall x \geq 0,\ x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.

Exercice 4 - Suite presque harmonique

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$
2. On pose
$$v_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$
Démontrer que
$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln n.$$
En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 5 - Dérivée seconde et variations de f

Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que $f(a) = 0$, que $f(b) = 0$ et que $f'' \leq 0$. Démontrer que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$.

Exercice 6 - Théorème des accroissements finis généralisés et règle de l'Hospital

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(c)\big(g(b) - g(a)\big)$.
2. En déduire que si $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$.
3. Application : déterminer $\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

Exercice 7 - C^1 ou pas C^1?

Étudier si les fonctions suivantes sont dérivables et C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$