Exercice 1 :

On revient à la définition, et on cherche si le taux d'accroissement admet une limite en 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{x}{1+|x|}}{x}=\frac{1}{1+|x|}\to 1$$

lorsque $x\to 0$. La fonction est donc dérivable en 0, de dérivée 1.
Concernant g, on a

$$\frac{g(x)-g(0)}{x}=\sin(x)\sin(1/x).$$

Utilisant $|\sin x|\leq |x|$ et $|\sin(1/x)|\leq 1$, on en déduit que

$$\left|\frac{g(x)-g(0)}{x}\right|\leq |x|.$$

Par le théorème de comparaison, le taux d'accroissement converge vers 0 lorsque x tend vers 0. La fonction g est donc dérivable en 0, avec $g'(0)=0$. Pour h, on a

$$\frac{h(x)-h(0)}{x}=|x|\times\frac{\sin x}{x}.$$

Puisque $\sin x/x$ tend vers 1 quand x tend vers 0 et que $|x|$ tend vers 0 quand x tend vers 0, le taux d'accroissement converge vers 0 quand x tend vers 0, et donc h est dérivable en 0, avec $h'(0)=0$.

Exercice 2 :

La fonction g est clairement dérivable sur $]0,1/2[$ et sur $]1/2,1[$. Le seul problème est en 1/2. Mais, on a

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}g(x)=f(1)=f(0)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}g(x).$$

La fonction g est donc continue en $1/2$. Pour $x<1/2$, on a

$$g'(x)=2f'(2x)\xrightarrow[x\to\frac{1}{2}^-]{}2f'(1)$$

et donc, par le théorème de prolongement d'une dérivée, g admet une dérivée à gauche en 1/2 égale à $2f'(1)$. De même, pour $x>1/2$, on a

$$g'(x)=2f'(2x-1)\xrightarrow[x\to\frac{1}{2}^+]{}2f'(0)$$

et donc, par le théorème de prolongement d'une dérivée, g admet une dérivée à droite en 1/2 égale à $2f'(0)$. La fonction g est dérivable en 1/2 si et seulement si les dérivées à droite et à gauche coïncident, c'est-à-dire si et seulement $f'(1)=f'(0)$.

Exercice 3 :

1. On rappelle que la fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{1}{1+x^2}\right| \leq 1.$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $\arctan$ entre x et y donne alors le résultat.

2. On appelle cette fois le théorème (et non l'inégalité!) des accroissements finis à e^x entre 0 et x. Il existe donc $c \in]0, x[$ tel que

$$e^x - 1 = e^x - e^0 = e^c(x-0) = e^c x.$$

Puisque $1 \leq e^c \leq e^x$ et $x \geq 0$, on en déduit l'inégalité demandée.

Exercice 4 :

1. On va appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \ln t$ sur l'intervalle $[x, x+1]$. Il existe donc $\theta \in]x, x+1[$ tel que

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{x+1-x}{\theta} = \frac{1}{\theta}.$$

On conclut car

$$0 < x < \theta < x+1 \implies \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{x}.$$

2. On applique l'inégalité précédente pour $x = n$, $x = n+1$, $x = n+2$ jusque $x = 2n-1$. On somme ces inégalités : dans le terme du milieu, il y a beaucoup de simplifications et on obtient, en ne gardant que l'inégalité de gauche :

$$v_n < \ln(2n) - \ln n.$$

On applique ensuite l'inégalité précédente pour $x = n+1$, $x = n+2$ jusque $x = 2n$ et on ne garde cette fois que l'inégalité de droite. Là encore, il se produit des simplifications et on obtient

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n.$$

Ceci se réécrit encore en

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) < v_n < \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln 2.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que (v_n) converge vers $\ln 2$.

Exercice 5 :

Raisonnons par l'absurde. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $f(c) < 0$. Le théorème des accroissements finis appliquée à f entre a et c nous dit qu'il existe $x_0 \in]a, c[$ tel que

$$f(c) - f(a) = f'(x_0)(c - a) \implies f'(x_0) < 0.$$

De même, le théorème des accroissements finis appliqué à f entre c et b nous dit qu'il existe $y_0 \in]c, b[$ tel que

$$f(b) - f(c) = f'(y_0)(b - c) \implies f'(y_0) > 0.$$

On conclut en appliquant le théorème des accroissements finis à f' entre x_0 et y_0 : il existe $d \in]x_0, y_0[$ tel que

$$f''(d) = \frac{f'(y_0) - f'(x_0)}{y_0 - x_0} > 0.$$

Ceci est une contradiction. Si l'on connait la théorie des fonctions convexes, le résultat est une conséquence immédiate que la fonction est concave puisque sa dérivée seconde est négative, et que la courbe représentative d'une fonction concave est sous ses cordes.

Exercice 6 :

1. Introduisons $h(x) = f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big)$. h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a; b[$ et $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b)$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(c)\big(f(b) - f(a)\big).$$

2. Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $c_x \in [a, x]$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Mais lorsque $x \to a$, il est clair que $c_x \to a$ aussi et donc $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \to l$. En conclusion, on a bien

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l.$$

3. En posant $f(x) = \cos x - e^x$ et $g(x) = (x + 1)e^x$, nous sommes exactement dans les conditions d'application du résultat précédent. Puisque $f'(x) = -\sin(x) - e^x$ et $g'(x) = (x + 2)e^x$, il vient $\frac{f'(0)}{g'(0)} = -\frac{1}{2}$ qui est la limite recherchée. En pratique, on lève très rarement une indéterminée de cette façon. On cherche plutôt à utiliser des développements limités.

Exercice 7 :

On remarque d'abord que f est continue en 0, car, pour $x \neq 0$, on a

$$|f(x) - f(0)| \leq x^2$$

et $x^2 \to 0$ quand $x \to 0$. D'autre part, f est clairement C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la dérivabilité en 0 en revenant à la définition, c'est-à-dire en étudiant si le taux d'accroissement admet une limite. On a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

et ceci tend vers 0 quand x tend vers 0, grâce à la majoration $|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$. Ainsi, f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. Pour déterminer si f est C^1 en 0, il faut étudier si la dérivée est continue en 0. Pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or, posons $u_n = \frac{1}{2n\pi}$. Alors, u_n tend vers 0, et

$$f'(u_n) = \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \neq f'(0).$$

Ainsi, f' n'est pas continue en 0, et f n'est pas de classe C^1.
Concernant g, on peut procéder comme pour f pour démontrer que g est C^1 sur $\mathbb{R}^*$, dérivable en 0 avec $g'(0) = 0$. De plus, pour $x \neq 0$,

$$g'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

de sorte que

$$|g'(x) - g'(0)| \leq 3|x|^2 + |x|.$$

Ceci entraîne que g' est continue en 0, et donc que g est de classe C^1.