Remédiations dénombrements

Exercice 1 - Dans une entreprise...

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées?

Exercice 2 - Le cadenas

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. (a) Combien y-a-t-il de codes possibles?
   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair?
   (c) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?
   (d) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4?
2. Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
   (a) Combien y-a-t-il de codes possibles?
   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair?
   (c) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6?

Exercice 3 - Comité de joueurs

Fred et Émile font partie d'une équipe de 8 joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de fabriquer un comité de 3 joueurs.

1. Combien y-a-t-il de comités possibles?
2. Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 1 fille?
3. Combien y-a-t-il de comités contenant au moins deux garçons?
4. On veut que Fred et Émile soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles?
5. On ne veut pas que Fred et Émile soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles?

Exercice 4 - Nombres et chiffres

Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun "1". Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants :

1. A.
2. A_1, ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres différents.
3. A_2, ensemble des nombres pairs de A.
4. A_3, ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

Exercice 5 - Anagrammes

Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.

Exercice 6 - Une extension de la formule du triangle de Pascal

Soit E l'ensemble à 12 éléments $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

1. Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent

   (a) a et b;

   (b) a mais pas b;

   (c) b mais pas a;

   (d) ni a, ni b.

2. En déduire la relation
$$\binom{12}{5} = \binom{10}{3} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{5}.$$

3. Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour $2 \leq p \leq n$, on a
$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}.$$

4. Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule du triangle de Pascal.

Exercice 7 - Dans un livre

Un livre comporte 14 chapitres.

1. Combien y-a-t-il de façons de choisir 3 chapitres dans ce livre?

2. Pour $k = 3, \dots, 14$, dénombrer les choix de 3 chapitres pour lesquels k est le plus grand numéro des chapitres choisis.

3. En déduire que
$$\binom{14}{3} = \binom{13}{2} + \binom{12}{2} + \dots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}.$$

4. Généraliser les dénombrements précédents pour démontrer que, pour $1 \leq p \leq n$, on a
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 8 - Une extension de la formule du triangle de Pascal

Soient p, q, m des entiers naturels, avec $q \leq p \leq m$. Démontrer par un dénombrement que
$$\binom{m}{p} = \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} \times \binom{m-q}{p-j}.$$

Exercice 9 - Bizarre, bizarre,...

Démontrer par un dénombrement que, pour $n \geq 1$, on a :
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$