Remediation Applications lineaires

Exercice 1 - Applications linéaires ou non (sur $\mathbb{R}^n$)?

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 0)$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 1)$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

Exercice 2 - Applications linéaires ou non (sur les polynômes)?

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^2,\ P \mapsto \big(P(0), P'(1)\big)$;
2. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto AP$, où $A \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme fixé;
3. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto P^2$.

Exercice 3 - Noyau et image

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y).$$

Déterminer le noyau de f, son image. f est-elle injective? surjective?

Exercice 4 - Noyau et image

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. L'application f est-elle injective? surjective?

Exercice 5 - Noyau et image

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (-3x - y + z,\ 8x + 3y - 2z,\ -4x - y + 2z).$$

1. Déterminer une base du noyau de f et sa dimension.
2. L'application f est-elle injective?
3. Donner le rang de f. L'application f est-elle surjective?
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 6 - Définie par une base

On considère dans $\mathbb{R}^2$ les trois vecteurs $u = (1, 1)$, $v = (2, -1)$ et $w = (1, 4)$.

1. Démontrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) = (2,1)$, $f(v) = (1,-1)$ et $f(w) = (5,a)$?

Exercice 7 - Noyau prescrit?

Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H?

Exercice 8 - A noyau fixé

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1,0,0)$ et $v = (1,1,1)$. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est E.

Exercice 9 - Application linéaire à contraintes

Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que, si (e_1,e_2,e_3,e_4) désigne la base canonique, alors on a

1. $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$ et $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$.
2. $\ker(f) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$.

Exercice 10 - Dérivation

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(f) = f'$. Quel est le noyau de ϕ? Quelle est son image? ϕ est-elle injective? surjective?

Exercice 11 - Avec des fonctions continues

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et u l'endomorphisme de E qui à tout f de E associe $u(f) : x \mapsto xf(x)$. L'application u est-elle injective? surjective?

Exercice 12

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $L : E \to E$ l'application qui à $f \in E$ associe $L(f)$ définie par $L(f) : x \mapsto f(x) - f(-x)$.

1. Montrer que L est un endomorphisme de E.
2. Préciser le noyau et l'image de L.
3. L'application L est-elle injective ? surjective ?

Exercice 13 - Avec des polynômes

Montrer que $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto P - XP'$ est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 14 - Applications linéaires dans un espace de polynômes

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1-X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\ker(u)$.

4. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

EXERCICE 15 - Automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$

Soit $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto P(X+1) + P(X)$.

1. Soit $n \geq 0$. Démontrer que ϕ induit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Démontrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 16 -

1. Pour $0 \leq k \leq n$, on note $B_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$. Démontrer que la famille $(B_0, \dots, B_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On définit ϕ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) B_k$. Démontrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

EXERCICE 17 - Différence de polynômes

Soit $n \geq 1$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\phi(P) = P(X+1) - P(X)$. Déterminer le noyau et l'image de ϕ.

EXERCICE 18 - Des polynômes

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit f l'application définie sur E par $f(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2. Pour $p = 0, \dots, n$, déterminer le degré de $f(X^p)$? En déduire $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Soit Q un polynôme de $\mathrm{Im} f$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

EXERCICE 19 - Polynôme somme de polynômes dérivés

Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}$.

EXERCICE 20 - Division euclidienne

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient A, B deux polynômes de degré $n+1$. On définit l'application $\phi : E \to E$ qui à un polynôme P associe le reste de AP dans la division euclidienne par B.

1. Démontrer que ϕ est linéaire;
2. Démontrer que ϕ est bijective si et seulement si A et B sont premiers entre eux.

EXERCICE 21 - Application aux polynômes

Le but de cet exercice est l'étude de l'application Δ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $(\Delta P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Question préliminaire : Soit (P_n) une famille de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour chaque n, $\deg(P_n) = n$. Prouver que (P_n) est une base de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que Δ est une application linéaire. Calculer son noyau et son image.
3. Montrer qu'il existe une unique famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant, pour tout $n \geq 1$, $\Delta(H_n) = H_{n-1}$, $H_n(0) = 0$ et telle que $H_0 = 1$. Montrer que (H_n) est une base de $\mathbb{R}[X]$.

4. Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$. Montrer que P peut s'écrire

$$P = \sum_{n=0}^{p} (\Delta^n P)(0) H_n.$$

5. Montrer que l'on a $(\Delta^n P)(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k)$.

6. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $H_n = \frac{X(X-1)...(X-n+1)}{n!}$.

7. En déduire que, pour tout polynôme P de degré p, les assertions suivantes sont équivalentes :

   (a) P prend des valeurs entières sur $\mathbb{Z}$.
   (b) P prend des valeurs entières sur $\{0, \dots, p\}$.
   (c) Les coordonnées de P dans la base (H_n) sont des entiers.
   (d) P prend des valeurs entières sur $p+1$ entiers consécutifs.

Exercice 22 - Inclusion de noyaux et d'images

Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, et $1 \leq p \leq q$ deux entiers. Comparer $\ker(f^p)$ et $\ker(f^q)$, puis $\mathrm{Im}(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^q)$.

Exercice 23 - Avez-vous compris ce qu'étaient le noyau et l'image?

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Démontrer que

$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im} f \subset \ker g.$$

Exercice 24 - Endomorphismes qui commutent, noyaux et images

Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v, c'est-à-dire que

$$v(\ker(u)) \subset \ker(u) \text{ et } v(\mathrm{Im}(u)) \subset \mathrm{Im}(u).$$

Exercice 25 - Endomorphisme nilpotent et famille libre

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $n \geq 1$ vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit libre.

Exercice 26 - Une caractérisation des homothéties

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. Démontrer que pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

2. Soit $x, y \in E \backslash \{0\}$.

   (a) Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est liée.
   (b) Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est libre.

3. En déduire que f est une homothétie.

Exercice 27 - Factorisation et inclusion de noyaux

Dans cet exercice, on admet que dans tout espace vectoriel, un sous-espace admet un supplémentaire. Soient E, F deux espaces vectoriels et $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que

$$\ker(u) \subset \ker(v) \iff \exists f \in \mathcal{L}(F) \text{ tel que } v = f \circ u.$$

Exercice 28 - Factorisation et inclusion des images

Dans cet exercice, on suppose connue la propriété suivante : si E_1 est un espace vectoriel et F_1 est un sous-espace vectoriel de E_1, alors il possède un supplémentaire. Soient alors E, F, G trois espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $v \in \mathcal{L}(E, G)$. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u)$;
2. Il existe $w \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $v = u \circ w$.

Exercice 29 - Matrices, produits et composition

Soient S et T les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$S(x, y) = (2x - 5y,\ -3x + 4y) \quad \text{et} \quad T(x, y) = (-8y,\ 7x + y).$$

1. Déterminer les matrices de S et T dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les applications linéaires $S + T$, $S \circ T$, $T \circ S$ et $S \circ S$ ainsi que leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 30 - AL-0

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z).$$

1. Montrer que u est linéaire
2. Soient $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculer $u(\mathcal{E}_1)$, $u(\mathcal{E}_2)$ et $u(\mathcal{E}_3)$ en fonction de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$.
3. Écrire la matrice de u dans les bases canoniques.
4. Montrer que $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Écrire la matrice de u dans les bases $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$.

Exercice 31 - AL-x

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par $f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t)$.

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice A représentant l'endomorphisme f dans cette base.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Quelle est la dimension du noyau de f? Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de $\ker(f)$.

Exercice 32 - Donnée par une matrice

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 33 - Réduction

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 34 - Application linéaire définie sur les matrices

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 35 - Matrice inverse et application linéaire sur les polynômes

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ si $i \leq j$, $a_{i,j} = 0$ sinon.

1. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que A est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 36 - Matrice d'une transvection

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\phi \in \mathcal{L}(E)$. On dit que ϕ est une transvection si

- $\mathrm{Im}(\phi - Id_E) \subset \ker(\phi - Id_E)$;
- $\ker(\phi - Id_E)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de ϕ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où α est un réel non nul.

Exercice 37 - D'un produit à l'autre

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ tels que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $BA = I_2$.

Exercice 38 - Base adaptée à un endomorphisme dont le carré est nul

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Démontrer que $\dim(\ker(f)) = 2$.

2. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 39 - Changement de base

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e_1' = e_2 + e_3,\ e_2' = e_3 + e_1,\ e_3' = e_1 + e_2 \text{ et } f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$ puis que (f_1', f_2') est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases?

Exercice 40 - Explicite...

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\mathbf{1}.\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{2}.\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{3}.\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{4}.\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 41 - Surjective?

Soient α, β deux réels et

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha,\beta}$ est surjective.

Exercice 42 - Avec un paramètre

Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Vous avez accès aux corrigés de cette feuille par l'url :
http://www.bibmath.net/ressources/justeunefeuille.php?id=22935