Remédiation intégration sur un segment

Exercice 1 - Reconnaissance de formes

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad g(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} \qquad h(x) = \frac{\ln x}{x}$$
$$k(x) = \cos(x)\sin^2(x) \qquad l(x) = \frac{1}{x\ln x} \qquad m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}.$$

Exercice 2 - Reconnaissance de formes

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3}$, $I =]-\infty, -2[$
3. $f(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}}$, $I =]-\infty, 0[$
4. $f(x) = \frac{1}{x\ln(x^2)}$, $I =]1, +\infty[$.

Exercice 3 - Reconnaissance de forme

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos(3x))\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4 - Intégration par parties - Niveau 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\mathbf{1}.\quad I = \int_0^1 xe^x dx \qquad \mathbf{2}.\quad J = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

Exercice 5 - Intégration par parties - Niveau 2

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$\mathbf{1}.\quad x \mapsto \arctan(x) \qquad \mathbf{2}.\quad x \mapsto (\ln x)^2 \qquad \mathbf{3}. x \mapsto \sin(\ln x).$$

Exercice 6 - Fraction rationnelle puis intégration par parties

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [1,2]$, on a : $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.
2. Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$.
3. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 - Primitive d'une puissance du logarithme

Pour $n \geq 1$, donner une primitive de $\ln^n x$.

Exercice 8 - Une suite d'intégrales

Pour (n,p) éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx.$$

Calculer $I_{n,p}$.

Exercice 9 - Changements de variables - Niveau 1

En effectuant un changement de variables, calculer

$$\mathbf{1.}\quad \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt \qquad \mathbf{2.}\quad \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

Exercice 10 - Changements de variables - Niveau 2

En effectuant un changement de variables, calculer

$$\mathbf{1.}\quad \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx,\ n\in\mathbb{N} \qquad \mathbf{2.}\quad F(x)=\int_1^x \frac{e^t}{(3+e^t)\sqrt{e^t-1}}dt,\ x>0$$

Exercice 11 - Fonction avec un axe de symétrie

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x\in[a,b]$, on a $f(a+b-x)=f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

En déduire la valeur de $I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Exercice 12 - Changements de variables - Recherche de primitives

En effectuant un changement de variables, donner une primitive des fonctions suivantes :

$$\mathbf{1.}\quad x\mapsto \frac{\ln x}{x} \qquad \mathbf{2.}\quad x\mapsto \cos(\sqrt{x})$$

Exercice 13 - Une erreur dans un changement de variables

On demande de calculer

$$I=\int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2(x)}.$$

Sur une copie d'un étudiant, on lit

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{dx}{1+\frac{1}{1+\tan^2 x}} \\ &= \int_0^\pi \frac{(1+\tan^2 x)dx}{2+\tan^2 x}. \end{aligned}$$

Je pose $t=\tan x$, d'où $dt=(1+\tan^2 x)dx$, et j'obtiens

$$I=\int_{\tan 0}^{\tan\pi}\frac{1}{2+t^2}dt=0.$$

1. Pourquoi est-ce manifestement faux?
2. Où est l'erreur de raisonnement?
3. Quelle est la valeur de I?

Exercice 14 - Intégrale d'une fraction rationnelle avec décomposition en éléments simples

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$,
$$\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}.$$
2. En déduire la valeur de $\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx$.

Exercice 15 - Fraction rationnelle avec décomposition en éléments simples

Soit $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in]1,+\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que
$$\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$
2. En déduire la primitive de f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 16 - Exponentielle - 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 e^x(2x^3+3x^2-x+1)dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin^2 x dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 e^x \cos x dx$

Exercice 17 - Exponentielle - 2

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\cosh x}$ **2.** $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$
3. $x \mapsto \dfrac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}e^x$ **4.** $x \mapsto \dfrac{1}{\cosh x(1+\sinh x)}$

Exercice 18 - Puissances et produits

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin^5 x$ **2.** $x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x$ **3.** $x \mapsto \cos(3x)\cos^3 x$.

Exercice 19 - Quelques primitives à savoir calculer!

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$ **2.** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ **4.** $x \mapsto e^x(2x^3+3x^2-x+1)$
5. $x \mapsto \sin^5(x)$ **6.** $x \mapsto \arctan(x)$

Exercice 20 - Relation de Chasles

1. Soient $m, n \in \mathbb{Z}^2$ avec $n \geq m$. Calculer $\int_m^n \lfloor x \rfloor dx$.

2. Calculer $\int_{-1}^2 x|x|dx$.

3. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $I(a) = \int_0^1 \min(x, a)dx$.

Exercice 21 - Intégrale de f et de f^2

Déterminer les fonctions continues $f : [0,1] \to [0,1]$ vérifiant $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt$.

Exercice 22 - Point fixe

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$, alors f admet au moins un point fixe dans $[0,1]$.

Exercice 23 - Valeur moyenne

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Démontrer que sa valeur moyenne est atteinte : il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

Exercice 24 - Toutes les intégrales sont nulles

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in [a,b]^2$, on a $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$. Montrer que $f \equiv 0$.

Exercice 25 - Double relation

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) = \int_0^x g(t)dt$ et $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. On pose $u = f - g$.

1. Démontrer que $u' = -u$ et que $u(0) = 0$.

2. En déduire que $f = g = 0$.

Exercice 26 - Limites de suites

Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\dfrac{n\pi}{n}\right)\right)$.

2. $u_n = n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dots + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$.

3. $u_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

4. $u_n = \sqrt[n]{\left(1 + \left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right)\left(1 + \left(\dfrac{2}{n}\right)^2\right)\dots\left(1 + \left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right)}$.

Exercice 27 - Série harmonique alternée

Pour $n \geq 0$, on définit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx.$$

1. Démontrer que la suite (I_n) tend vers 0.

2. Pour $n \geq 0$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 28 - Série harmonique

On pose, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } v_n = u_n - \ln n.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n} \text{ et } 0 \leq v_n \leq 1.$$

3. Démontrer que pour tout entier naturel non nul,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}.$$

4. En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite γ (que l'on ne cherchera pas à calculer). Que dire de (u_n)?

Exercice 29 - Intégrales de Wallis (bis)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt.$$

1. Montrer que la suite (I_n) est strictement décroissante.
2. Montrer que, pour tout $u \in [0,1]$, on a $0 \leq 1 - u \leq e^{-u}$.
3. En déduire une majoration de I_n à l'aide de $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$.
4. Montrer que la suite (J_n) est majorée. En déduire que la suite (I_n) converge vers une limite que l'on calculera.
5. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
6. En déduire, pour $n \geq 0$, une expression de I_n à l'aide de factorielles,
7. En déduire une expression de $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 30 - Suites d'intégrales

Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$ **2**. $u_n = \int_0^n \frac{dt}{1+e^{nt}}$.

Exercice 31 - Étude d'une fonction

Pour $x > 0$, on note $\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ et $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$.

1. Justifier que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Exprimer f en fonction d'une primitive ϕ de φ. En déduire que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
3. Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.
4. Établir que, pour tout $x > 0$, $e^{-2x} \ln(2) \leq f(x) \leq e^{-x} \ln(2)$. En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.
5. On pose, pour $x \in]0, 1[$, $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$. Donner une relation entre f et g, et en déduire la limite de g en 1.

Vous avez accès aux corrigés de cette feuille par l'url :
http://www.bibmath.net/ressources/justeunefeuille.php?id=22136