Exercice 1 :

1. On a $3 \leq x \leq 6$ et $-4 \leq y \leq -2$. En sommant ces inégalités, on en déduit que $-1 \leq x+y \leq 4$.
2. On a $3 \leq x \leq 6$ et $2 \leq -y \leq 4$. En sommant ces inégalités, on en déduit que $5 \leq x-y \leq 10$.
3. On ne peut multiplier des inégalités que lorsqu'elles concernent des réels positifs. On va donc écrire $3 \leq x \leq 6$ et $2 \leq -y \leq 4$. En multipliant ces inégalités, on trouve $6 \leq -xy \leq 24$ soit finalement l'encadrement $-24 \leq xy \leq -6$.
4. On commence par remarquer que

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{4} \implies \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}.$$

En multipliant les inégalités, il vient

$$\frac{3}{4} \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{6}{2} = 3$$

soit finalement l'encadrement

$$-3 \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{3}{4}.$$

Exercice 2 :

1. Il suffit de se rappeler que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Ceci donne immédiatement le résultat.
2. On applique trois fois la question précédente :

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

$$bc \leq \frac{b^2+c^2}{2}.$$

$$ca \leq \frac{c^2+a^2}{2}.$$

En sommant ces trois inégalités, on obtient bien l'inégalité demandée.

3. On développe $(a+b+c)^2$ en l'écrivant $((a+b)+c)^2$, puis en redéveloppant le carré. On trouve

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

En utilisant le résultat de la question précédente, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$, on obtient exactement le résultat demandé.

Exercice 3 :

On va raisonner par analyse-synthèse.
Analyse : Imaginons que x soit une solution de cette équation. Alors il est déjà clair que $x \in]-\infty, 2]$, sinon la racine carrée n'aurait pas de sens. On doit aussi avoir $x \geq 0$, car la racine carrée est positive et donc $x \in [0,2]$. Élevons ensuite l'équation au carré. Si x est solution, alors $2 - x = x^2$ (on a bien ici simplement une implication, pas une condition nécessaire et suffisante!), c'est-à-dire $x^2 + x - 2 = 0$. La résolution de cette équation du second degré donne $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$. Seul x_1 est dans l'intervalle souhaité. Donc la seule solution possible est 1.
Synthèse : Prouvons que $x = 1$ est solution de l'équation. C'est presque évident, car $\sqrt{2-1} = 1$.
Conclusion : la seule solution de l'équation est 1.

Exercice 4 :

On va séparer deux cas :

- Si $x \geq y$, alors $x - y \geq 0$ et donc $|x - y| = x - y$. On a aussi $\max(x, y) = x$ et

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x.$$

- Si $x < y$, alors $|x - y| = y - x$ et $\max(x, y) = y$. Dans ce cas

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + y - x) = y.$$

Dans les deux cas, on a bien démontré la relation demandée. La démonstration pour le minimum est exactement similaire.

Exercice 5 :

1. Pour $x \geq 2$, on a $x + 3 \geq 5 \geq 0$ et $2x - 4 \geq 0$. On en déduit que $|2x - 4| = 2x - 4$ et $|x + 3| = x + 3$. On doit alors résoudre

$$2x - 4 = x + 3$$

dont la solution est $x = 7$, qui est bien dans l'intervalle $[2, +\infty[$.

2. Pour $x \in [-3, 2[$, on a $x + 3 \geq 0$ et $2x - 4 \leq 0$. On en déduit que $|2x - 4| = -2x + 4$ et $|x + 3| = x + 3$. On doit alors résoudre

$$-2x + 4 = x + 3$$

dont la solution est $x = 1/3$, qui est bien dans l'intervalle $[3, -2[$.

3. Pour $x < -3$, on a $x + 3 < 0$ et $2x + 4 < -2 \leq 0$, donc $|2x - 4| = -2x + 4$ et $|x + 3| = -x - 3$. On donc alors résoudre

$$-2x + 4 = -x - 3$$

donc la solution est $x = 7$, qui n'est pas dans cet intervalle. Ici, l'équation n'a pas de solutions dans l'intervalle $]-\infty, -3[$.

4. Les solutions de l'équation $|2x - 4| = |x + 3|$ sont donc $1/3$ et 7.

Remarquons qu'on aura aussi pu résoudre cet exercice en remarquant que $|a| = |b|$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$.

Exercice 6 :

La difficulté de l'exercice vient du fait que la valeur absolue a deux expressions distinctes suivant le signe de la quantité à l'intérieur. Ceci nous incite à raisonner par disjonction de cas.

- Si $x\leq 1$, alors $x-1\leq 0$ et $|x-1|=1-x$. On doit alors démontrer que, si $x\leq 1$, on a $1-x\leq x^2-x+1$. Étudions donc le signe du trinôme
$$P(x)=x^2-x+1-(1-x)=x^2\geq 0.$$
La propriété est vraie si $x\leq 1$.
- Si $x\geq 1$, alors $x-1\geq 0$ et $|x-1|=x-1$. On doit alors démontrer que, si $x\geq 1$, on a $x-1\leq x^2-x+1$. Étudions donc le signe du trinôme
$$Q(x)=x^2-x+1-(x-1)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 0.$$
La propriété est donc vraie si $x\geq 1$.

En conclusion, la propriété est vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 7 :

Pour que le max de deux nombres soit inférieur à un troisième nombre, il suffit que chacun de ces deux nombres soit inférieur ou égal au troisième. Ici, il suffit donc de démontrer que
$$|x|\left|\frac{x}{|x|}-\frac{y}{|y|}\right|\leq 2|x-y|$$
et
$$|y|\left|\frac{x}{|x|}-\frac{y}{|y|}\right|\leq 2|x-y|.$$
Par symétrie du rôle joué par x et y, on ne va démontrer que la première inégalité. Pour cela, on écrit
$$|x|\left|\frac{x}{|x|}-\frac{y}{|y|}\right|=\left|x-\frac{|x|}{|y|}y\right|.$$
Ensuite, on fait apparaitre y dans le membre de droite et on utilise l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire on écrit que
$$\left|x-\frac{|x|}{|y|}y\right|=\left|x-y+y-\frac{|x|}{|y|}y\right|\leq |x-y|+\left|y-\frac{|x|}{|y|}y\right|.$$
Il reste à démontrer que
$$\left|y-\frac{|x|}{|y|}y\right|\leq |x-y|.$$
Pour cela, on écrit que
$$\left|y-\frac{|x|}{|y|}y\right|=|y|\left|1-\frac{|x|}{|y|}\right|=|y|\times\left|\frac{|y|-|x|}{|y|}\right|=\big||x|-|y|\big|.$$
On conclut en appliquant l'inégalité triangulaire dont une conséquence est que
$$\big||x|-|y|\big|\leq |x-y|.$$

Exercice 8 :

Notons $m = \lfloor x+1 \rfloor$. Par définition, m est l'unique entier vérifiant

$$m \leq x+1 < m+1.$$

Maintenant, on sait aussi que

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$$

et donc, si on pose $n = \lfloor x \rfloor$, on a aussi

$$n+1 \leq x+1 < (n+1)+1.$$

Par unicité de l'entier m vérifiant la première inégalité, on en déduit que $m = n+1$, ce qui est exactement le résultat demandé.

Exercice 9 :

D'une part on a $\lfloor nx \rfloor \leq nx$ donc

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$$

et puisque la fonction partie entière est croissante :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor.$$

D'autre part, on a $\lfloor x \rfloor \leq x$ donc $n \lfloor x \rfloor \leq nx$ ou encore

$$\lfloor n \lfloor x \rfloor \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor.$$

Maintenant, puisque $n \lfloor x \rfloor$ est un entier, $\lfloor n \lfloor x \rfloor \rfloor = n \lfloor x \rfloor$ et donc

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}.$$

En reprenant la partie entière de cette inégalité, on trouve

$$\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$$

ce qui est l'autre inégalité désirée.
Une autre méthode est d'introduire la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor.$$

Il est facile de voir que ϕ est périodique de période 1. En effet, on a

$$\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

et

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{\lfloor n(x+1)\rfloor}{n}\right\rfloor &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx+n\rfloor}{n}\right\rfloor\\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx\rfloor+n}{n}\right\rfloor\\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx\rfloor}{n}+1\right\rfloor\\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor+1.\end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer que $\phi(x)=0$ pour $x\in[0,1[$. Mais pour $x\in[0,1[$, on a $\lfloor x\rfloor=0$ et

$$\lfloor nx\rfloor < n$$

d'où

$$\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}<1$$

et

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor=0.$$

Exercice 10 :

1. Il suffit de développer la somme. On trouve que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n(1-a_k)^2 &= \sum_{k=1}^n\left(1-2a_k+a_k^2\right)\\ &=\sum_{k=1}^n 1-2\sum_{k=1}^n a_k+\sum_{k=1}^n a_k^2\\ &= n-2\sum_{k=1}^n a_k+\sum_{k=1}^n a_k^2.\end{aligned}$$

2. On remarque d'abord que tout élément de E_n, comme somme de carrés, est positif, donc E_n est minoré par 0. De plus, 0 est élément de E_n (si tous les a_k sont nuls). On en déduit donc que 0 est le plus petit élément de E_n.
Prenons ensuite $x\in E_n$ et $a_1,\dots,a_n$ la suite associée. D'après la question précédente, on a

$$0\leq \sum_{k=1}^n(1-a_k)^2=n-2x+x=n-x.$$

On en déduit que $n-x\geq 0$ et donc que $x\leq n$. Ainsi, E_n est majoré par n. De plus, n appartient à E_n (il suffit de choisir tous les a_i égal à 1). Ainsi, n est le plus grand élément de E_n.