Probabilités générales et conditionnelles

Attention, admettre 12.3 et 13.1

Exercice 1 - Vrai/Faux

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. Deux événements incompatibles sont indépendants.
2. Deux événements indépendants sont incompatibles.
3. Si $P(A) + P(B) = 1$, alors $A = \bar{B}$.
4. Si A et B sont deux événements indépendants, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
5. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ deux systèmes complets d'événements. Alors $(A_n \cap B_p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est un système complet d'événement.

Exercice 2 - Sur la probabilité de l'intersection

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. Démontrer que

$$\max\big(0, P(A) + P(B) - 1\big) \leq P(A \cap B) \leq \min\big(P(A), P(B)\big).$$

Exercice 3 - Inégalité de Bonferroni

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, \dots, A_n$ des événements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right) - (n-1).$$

Exercice 4 - Indépendance et contexte

1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard, et on considère les événements
$$A = \text{"tirage d'un nombre pair"},$$
$$B = \text{"tirage d'un multiple de 3"}.$$
Les événements A et B sont-ils indépendants?
2. Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Exercice 5 - Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

Votre voisine a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les trois événement suivants :

- A="les deux enfants sont de sexes différents"
- B="l'ainé est une fille"
- C="le cadet est un garçon".

Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 6 - Probabilité d'une réunion et indépendance

Soient $A_1, \dots, A_n$ n événements d'un espace probabilisé (Ω, P). On les suppose mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_i = P(A_i)$. Donner une expression simple de $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ en fonction de $p_1, \dots, p_n$.
Application : on suppose qu'une personne est soumise à n expériences indépendantes les unes des autres et qu'à chaque expérience, elle ait une probabilité p d'avoir un accident. Quelle est la probabilité qu'elle ait au moins un accident?

Exercice 7 - Indépendance impossible

On suppose qu'on a un espace probabilisé tel que l'univers Ω est un ensemble fini de cardinal un nombre premier p, et que le modèle choisi soit celui de l'équiprobabilité. Prouver que deux événements A et B non triviaux (différent de $\varnothing$ et Ω) ne peuvent pas être indépendants.

Exercice 8 - Circuit électrique

1. Soient A, B, C trois événements. Montrer que :
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$
2. On dispose de 3 composants électriques C_1, C_2 et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est p_i, et de fonctionnement totalement indépendant les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit
   (a) si les composants sont disposés en série.
   (b) si les composants sont disposés en parallèle.
   (c) si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Exercice 9 - Probabilités composées

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire?

Exercice 10 - A partir de dénombrement

Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure dans le tirage?
2. Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire?

Exercice 11 - Déplacement d'un pion sur un triangle

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n;

- pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n" et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n),\ b_n = P(B_n),\ c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les nombres a_n, b_n et c_n pour $n = 0, 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.$$
En déduire une expression de a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer les limites respectives des suites (a_n), (b_n) et (c_n). Interpréter le résultat.

Exercice 12 - La puce

Le sommets d'un triangle équilatéral sont numérotés 1, 2 et 3. Une puce saute de sommet en sommet de la façon suivante : si à l'instant n elle se trouve sur un sommet donné, elle saute à l'instant $n+1$ vers l'un des deux sommets voisins avec probabilité 1/2. On note X_n la position de la puce à l'instant n.

1. On suppose dans cette question seulement que X_0 suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Décrire la loi de X_1 puis la loi de X_n pour $n \geq 1$.
On s'intéresse maintenant au cas général. On note $U_n = \begin{pmatrix} P[X_n = 1] \\ P[X_n = 2] \\ P[X_n = 3] \end{pmatrix}$.
2. Montrer qu'il existe une matrice A que l'on déterminera telle que pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = AU_n$.
3. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P, qu'on ne cherchera pas à calculer, telle que
$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} P^t .$$
4. En déduire que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ converge vers un vecteur U_∞ vérifiant $U_\infty = AU_\infty$.
5. Que vaut U_∞ ?

Exercice 13 - Marche aléatoire sur un triangle

1. Question préliminaire : Soit M la matrice
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$
Démontrer que M est diagonalisable, et trouver P inversible et D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.

2. On considère une particule se déplaçant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B et C d'un triangle suivant le procédé suivant :

   - si la particule se trouve en B, elle y reste;
   - si la particule se trouve en A, elle se rend la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable;
   - si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, sinon elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.

   A la première seconde, la particule se pose de façon équiprobable sur un des trois sommets. Pour tout $n \geq 1$, on note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement "à la n-ième seconde, la particule se trouve en A" (resp. B et C), et on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de A_n, B_n et C_n.
   Que valent a_1, b_1 et c_1?

3. Donner une relation de récurrence entre a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} et a_n, b_n et c_n.

4. On note, pour $n \geq 1$, X_n le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Vérifier que $X_{n+1} = MX_n$.

5. En déduire la valeur de a_n, b_n et c_n.

6. Étudier la convergence des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

Exercice 14 - Clés USB

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de clés USB. 5% des boites sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boites abîmées contiennent au moins une clé défectueuse.
- 98% des boites non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : "la boite est abîmée" et par D l'événement "la boite achetée contient au moins une clé défectueuse".

1. Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(D|A)$, $P(D|\bar{A})$, $P(\bar{D}|A)$ et $P(\bar{D}|\bar{A})$. En déduire la probabilité de D.
2. Le client constate qu'un des clés achetées est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abîmée?

Exercice 15 - Tests de dépistage

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à $0,1$%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test?

Exercice 16 - Menteur!

Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. Quelle est la probabilité pour qu'il soit un tricheur?

Cette feuille d'exercices a été conçue à l'aide du site http://www.bibmath.net