3 Produit scalaire et déterminant

Rappel 3.1. Tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :
- son ______ : de A vers B.
- sa __________ : celle de (AB).
- sa ________ , notée ..... égale à la longueur du segment $[AB]$.

Coordonnées : soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan. On a :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$$

Norme : soit $\vec{u}(x;y)$ dans un repère **orthonormé**. On a :

$$\|\vec{u}\| = \dots\dots\dots$$

I Produit scalaire et orthogonalité

I.1 Produit scalaire

a) Définition et propriétés

Définition 3.1 – Produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle ________________ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté ......, le réel :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Remarque 3.1. En particulier, $\vec{u}\cdot\vec{u} = \dots\dots$, car $\cos(\vec{u},\vec{u}) = \cos(0) = 1$.

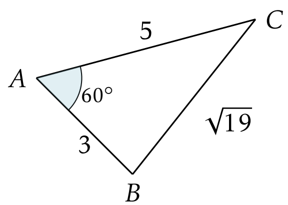
Propriété 3.1

Soit θ l'angle formé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\theta = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple 3.1.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.



2. Sachant que $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}$, déterminer une valeur approchée de $\widehat{ABC}$ à 10^{-2} près.

Propriété 3.2 – Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout $k\in\mathbb{R}$, on a :
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dots\dots$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Remarque 3.2. On retrouve les mêmes propriétés que celles que l'on connaît pour le produit de nombre réels.

Remarque 3.3. Les identités remarquables restent donc vraies pour le produit scalaire.
Par exemple : $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$.

Exemple 3.2. Simplifier les expressions suivantes :
1. $\left(\frac{1}{2}\vec{u}\right)\cdot(6\vec{u})$
2. $\vec{u}\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$
3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}$

b) Expression analytique du produit scalaire

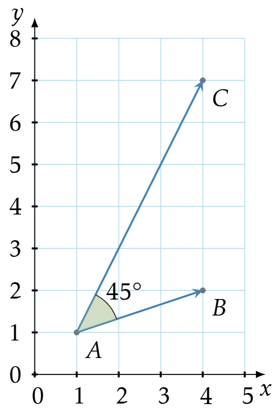
Théorème 3.1 – Expression analytique du produit scalaire

Soients $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs dans un repère ______________ . On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$$

Exemple 3.3.

Soient A, B et C trois points représentés sur la figure ci-contre.



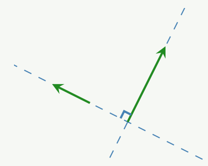
1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en utilisant la définition du produit scalaire.

2. Retrouver ce résultat avec l'expression analytique du produit scalaire.

I.2 Orthogonalité

Définition 3.2 – Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs sont dits ______________ si l'un des deux est nul ou si ______________ ____________________________ .



Propriété 3.3 – Orthogonalité et produit scalaire

Deux vecteurs sont ______________ si et seulement si ________________ ______________ .

Exemple 3.4. Soient $A(1;2)$, $B(3;-1)$ et $C\left(6;\frac{16}{3}\right)$ dans un repère orthonormé.
Démontrer que ABC est rectangle en A.

I.3 Projection orthogonale

Propriété 3.4

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, et soit $\vec{p}$ le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$. Alors :

$$\dots\dots\dots\dots$$

Exemple 3.5. Soient $A(1;1)$, $B(3;2)$ et $C(2;1)$ dans un repère orthonormé.
Soit H le projeté orthogonal de C sur $\overrightarrow{AB}$.

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$.

2. En déduire les coordonnées de H.

3. En déduire la longueur de la hauteur issue de C, puis l'aire du triangle ABC.

II Déterminant et colinéarité

II.1 Déterminant

Définition 3.3

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Le _______________ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté ...., est le nombre défini par :

....

Propriété 3.5

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\mathcal{A} = \text{..........}$$

Exemple 3.6. Soient $A(-2;1)$, $B(0;4)$, $C(1;-1)$ et $D(-1;-4)$.
Déterminer l'aire du parallélogramme $ABCD$.

Corollaire 3.6

Soit ABC un triangle et $\mathcal{A}$ son aire.

$$\mathcal{A} = \text{................}$$

Démonstration

$\left|\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\right|$ est égal à l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. La diagonale $[BC]$ coupe ce parallélogramme en deux parties égales dont l'aire est celle du triangle ABC. □

Exemple 3.7. Soient $A(6;1)$, $B(1;4)$ et $C(2;2)$.
Déterminer l'aire du triangle ABC.

II.2 Colinéarité

Définition 3.4 – Vecteurs colinéaires

Deux vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits _______________ si et seulement si il existe un nombre réel non nul k tel que ....

Remarque 3.4. Deux vecteurs sont donc colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

Exemple 3.8. Soient les points $A(-2;0)$, $B(-1;2)$, $C(3;1)$ et $D(1;-3)$.
Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété 3.7 – Déterminant et colinéarité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ____________ si et seulement si ______________ ______________ .

Exemple 3.9. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-9\\-12\end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Que peut-on en déduire ?

3. Vérifier en indiquant le réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.