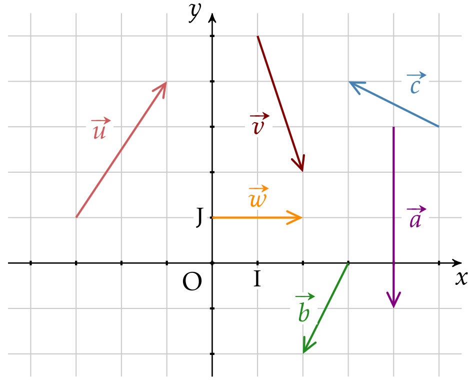
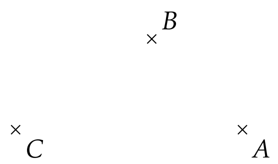
A Introduction

A.1 Faire ses gammes

☆☆ **1** Lire les coordonnées des vecteurs représentés ci-dessous.



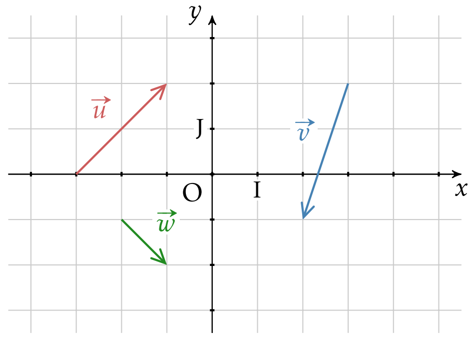
☆☆ **2** Placer les points D et E tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$.



☆☆ **3** Placer les points C et D tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$.

☆☆ **4** Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan.

1. Placer les points A, B et C tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.
2. Déterminer les coordonnées et la norme de chaque vecteur.



☆☆ **5** Dans un repère, on considère les points suivants :

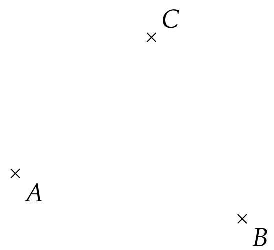
- $A(-3;-1)$,
- $B(-2;2)$,
- $C(0;5)$,
- $D(2;4)$,
- $E(-3;4)$,
- $F(-5;1)$,
- $G(3;3)$,
- $H(-2;5)$.

1. Dessiner, dans le même repère orthonormé, les huit points donnés.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$.

☆☆ **6** Dans chacun des cas, déterminer si ABCD est un parallélogramme.

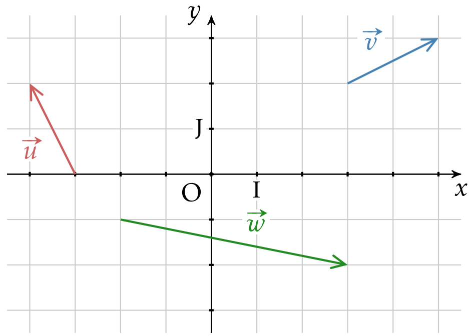
1. $A(1;-2)$, $B(7,-2)$, $C(9,2)$ et $D(3;2)$.
2. $A(0;-2)$, $B(-1;1)$, $C(7;-4)$ et $D(6;-1)$.
3. $A(-3,06;-2,78)$, $B(-0,08;-5,84)$, $C(8,22;-3,08)$ et $D(5,1;0,3)$.
4. $A(-5;2)$, $B(-3;13)$, $C(5;9)$ et $D(3;-2)$.

☆☆ **7** Placer les points D et E tels que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$.



☆☆ **8** Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan.

1. Placer les points A, B et C tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.
2. Déterminer les coordonnées et la norme de chaque vecteur.



9 Déterminer par le calcul les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$.
$A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(-1;-1)$, $D(2;-2)$, $E(4;-1)$, $F(3;2)$, $G(-4;-1)$, $H(-3;3)$.

A.2 Exercices d'entraînement

10 Soit $ABCD$ un parallélogramme et I l'intersection des diagonales.
Compléter les égalités afin qu'elles soient vraies :

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\ldots C}$
2. $\overrightarrow{D\ldots} = \overrightarrow{CB}$
3. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{\ldots B}$
4. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{C\ldots}$
5. $\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{\ldots B}$
6. $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{\ldots B}$
7. $\|\overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{\ldots C}\|$
8. $\|\overrightarrow{IA}\| = \|\overrightarrow{I\ldots}\|$
9. $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{\ldots C}\|$

11 Dans un repère, on donne les points :

$$A(-2;4),\ B(-3;5),\ C(4;6)$$

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
2. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection des diagonales [AC] et [BD] ?
3. Calculer les coordonnées du point E tel que ABDE soit un parallélogramme.

12 Soit ABC un triangle.
Vrai ou faux ? *Justifier*.

1. Si $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.
2. $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$
3. L'aire du triangle ABC vaut $\frac{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|}{2}$.
4. Si $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, $\|\overrightarrow{AB}\| = 2 \cdot \|\overrightarrow{BC}\|$ et $4 \cdot \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\|$, alors le périmètre de ABC vaut $10,5$.
5. Si $\|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{CB}\|$ alors le triangle ABC est isocèle et rectangle en C.
6. Si $A(1;1)$ et $B(4;7)$, alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $[AB]$ mesure $\sqrt{45}$.

13 Soit ABC un triangle quelconque. On note I le milieu de $[AB]$.

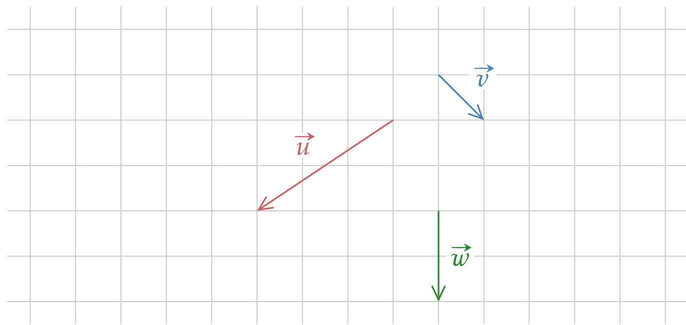
1. Construire la figure et construire le point I', image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2. Construire le point A', image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{II'}$.
3. Démontrer que $A'CBA$ est un parallélogramme.
4. En déduire la position du milieu de $[A'B]$.

B Opérations sur les vecteurs

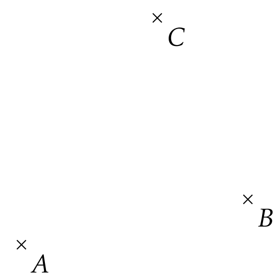
B.1 Faire ses gammes

14 Tracer un représentant des vecteurs suivants :

1. $\vec{u_1} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. $\vec{u_2} = \vec{u} + \vec{w}$.
3. $\vec{u_3} = 2 \cdot \vec{w}$.
4. $\vec{u_4} = -\vec{u}$.



15 Placer les point D et E tels que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE}$.



16 On considère un objet soumis à trois forces qui se compensent :

$$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$$

On modélise cet objet par un point O.

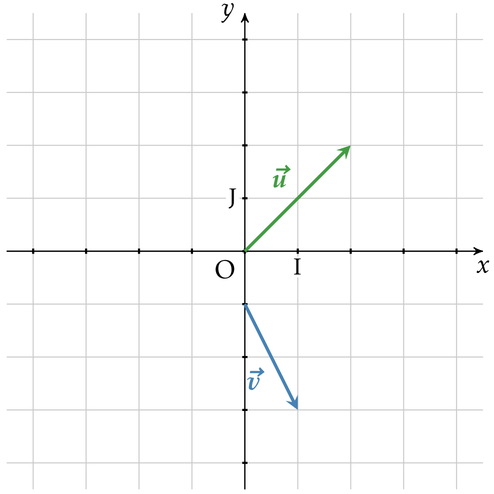
1. Construire le point O ainsi que deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, de directions différentes et non nulles.
2. Compléter le schéma en traçant le vecteur $\overrightarrow{F_3}$.

17 Dans un repère $(O;I,J)$, on considère les points $R(5;1)$, $S(2;-4)$, $T(-3;1)$, $U(1;4)$ et $V(3;5)$.
Calculer les coordonnées du point $W(x;y)$ telles que $\overrightarrow{VW}=\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{TU}$.

18 Représentant d'un vecteur $k\vec{u}$

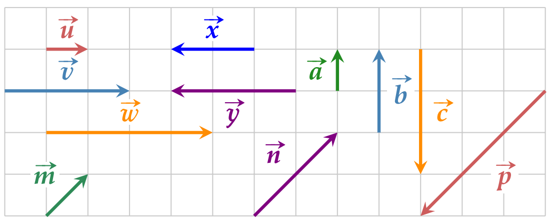
Tracer un représentant de :

- $\overrightarrow{u_1}=2\vec{u}$
- $\overrightarrow{u_2}=-\frac{1}{2}\vec{u}$
- $\overrightarrow{v_1}=-\vec{v}$
- $\overrightarrow{v_2}=\frac{3}{2}\vec{v}$



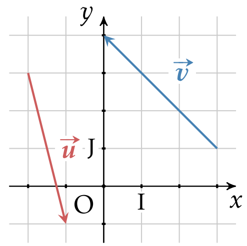
19 Multiplication d'un vecteur par un réel

Dans chaque cas, indiquer le nombre manquant.



1. $\vec{v}=\dots\cdot\vec{u}$
2. $\vec{y}=\dots\cdot\vec{x}$
3. $\vec{b}=\dots\cdot\vec{a}$
4. $\vec{n}=\dots\cdot\vec{m}$
5. $\vec{u}=\dots\cdot\vec{w}$
6. $\vec{u}=\dots\cdot\vec{y}$
7. $\vec{b}=\dots\cdot\vec{c}$
8. $\vec{m}=\dots\cdot\vec{p}$
9. $\vec{w}=\dots\cdot\vec{v}$
10. $\vec{y}=\dots\cdot\vec{w}$
11. $\vec{c}=\dots\cdot\vec{b}$
12. $\vec{n}=\dots\cdot\vec{p}$

20 Coordonnées d'un vecteur $k\vec{u}$



Déterminer les coordonnées des vecteurs :

$$\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\ 3\vec{u}\ ;\ -2\vec{v}\ ;\ -\frac{1}{5}\vec{u}\ ;\ 3\vec{u}-2\vec{v}$$

21 Soit M le milieu d'un segment $[AB]$.
Compléter les égalités afin qu'elles soient vraies :

1. $\overrightarrow{M\dots}+\overrightarrow{M\dots}=\vec{0}$
2. $2\cdot\overrightarrow{A\dots}=\overrightarrow{A\dots}$

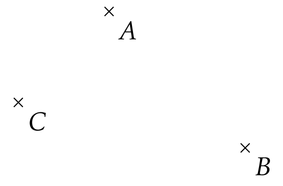
22 Soient $A(3;5)$, $B(-1;4)$ et $C(0;2)$.
Déterminer les coordonnées des points D et E tels que :

1. $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$

23 Dans un repère $(O;I,J)$, soient $A(2;-4)$, $B(-1;-3)$ et $C(-1;2)$.

1. Déterminer les coordonnées du point :
   (a) E tel que $\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{OB}$
   (b) D tel que $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$
   (c) F tel que $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DE}+2\overrightarrow{DO}$
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF}$.
3. Que peut-on en déduire pour le point A ?

24 Placer les point D et E tels que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CE}$.

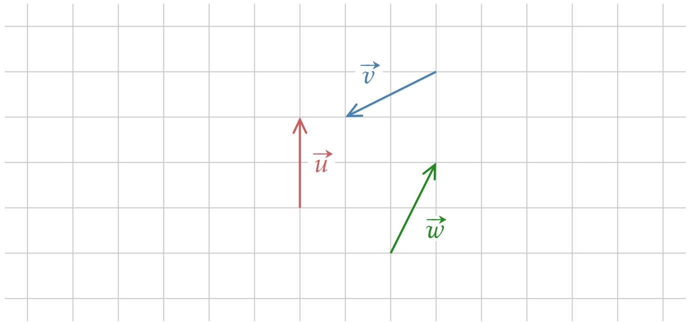


25 On considère dans un repère $(O;I,J)$ les points suivants : $A(0;1)$, $B(-2;8)$, $C(-3;-4)$ et $D(-5;3)$.

1. Calculer les coordonnées de N tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CD}$.
2. Calculer les coordonnées de M telles que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$.

26 Tracer un représentant des vecteurs suivants :

1. $\overrightarrow{u_1} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. $\overrightarrow{u_2} = \vec{u} + \vec{w}$.
3. $\overrightarrow{u_3} = \vec{v} + \vec{w}$.



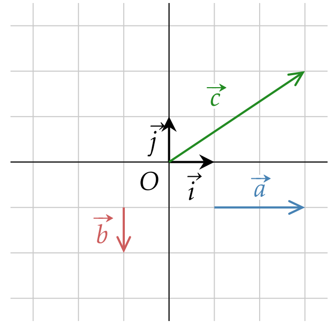
B.2 Exercices d'entraînement

27 Soit $ABCD$ un parallélogramme et I le point d'intersection de ses diagonales. Compléter les égalités suivantes afin qu'elles soient vraies :

1. $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{\ldots C}$
2. $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{CD}\right)$
3. $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{\ldots\ldots}$
4. $2 \cdot \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{BD}$
5. $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{I\ldots} = \vec{0}$
6. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{\ldots\ldots}$

28 Soient $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On considère le repère orthonormé ($\vec{i}$ et $\vec{j}$ indiquent l'unité et le sens de chaque axe) et les vecteurs ci-dessous :



1. Écrire $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et déterminer leurs composantes.
2. Démontrer que tout vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

> **Remarque 1.1.** Pour tout vecteur $\vec{u}$, cette écriture est unique. $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est appelée **base canonique** du plan.

3. Soit $\vec{m}\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$. Déterminer les réels α et β tels que $\vec{m} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{c}$ puis calculer $\|\vec{m}\|$.

29 Soient ABCD un parallélogramme et I le milieu de [BC].

1. Construire la figure.
2. Construire le représentant d'origine B du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI}$.
3. À quel vecteur de la figure le vecteur $\vec{u}$ semble-t-il égal ?
4. Prouver cette conjecture.

30 Soit M le milieu du segment $[AB]$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.
2. Déterminer les coordonnées de M si $A(1;-4)$ et $B(5;5)$.