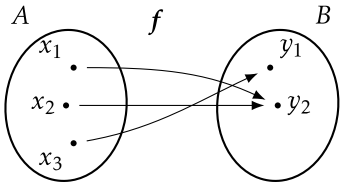
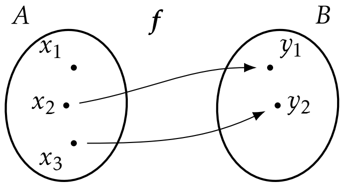
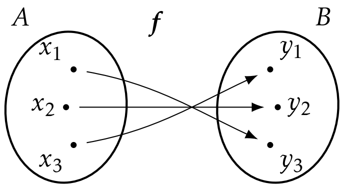
A Bijection

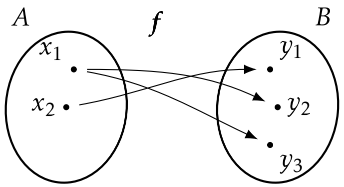
A.1 Faire ses gammes

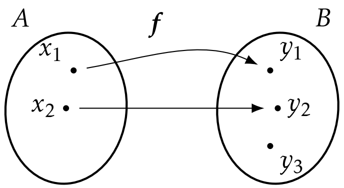
1 Dans chacun des cas, dire si f définit une bijection de A vers B. *Justifier*.

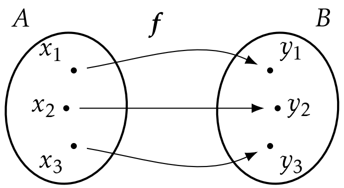
1.


2.


3.


4.


5.


6.


1. f définit bien une fonction, mais y_2 a deux antécédents dans A, donc f ne définit pas une bijection de A vers B.
2. x_1 n'est associé à aucun élément de B, donc f ne définit pas une bijection de A vers B.
3. f définit bien une bijection de A vers B.
4. x_1 est associé à deux éléments de B, donc f ne définit même pas une fonction de A vers B.
5. y_3 n'est associé à aucun élément de A. Comme f définit bien une fonction, on peut aussi le formuler en disant que y_3 n'a aucun antécédent dans A par f. Donc f ne définit pas une bijection de A vers B.
6. f définit bien une bijection de A vers B.

2 Les fonctions suivantes sont-elles bijectives ? Si non, modifier leurs ensembles de départ et d'arrivée pour qu'elles le soient.

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x-3$
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$
3. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$
4. $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

1. Oui.
2. Non, car 1 a deux antécédents dans R. Mais f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$, par exemple.
3. Non, car -1 n'a aucun antécédent dans $\mathbb{R}^+$. Mais f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, par exemple.
4. Non, car 0 n'a aucun antécédent dans $\mathbb{R}^*$. Mais f est bijective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$, par exemple.

A.2 Exercices d'entraînement

3 Soit f dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5		1		5
$f(x)$	0	↗	4	↘	2

1. f est-elle bijective de $[-5;5]$ vers $\mathbb{R}$?
2. f est-elle bijective de $[-5;5]$ vers $[0;4]$?
3. f est-elle bijective de $[-5;1]$ vers $\mathbb{R}$?
4. Proposer deux ensembles A et B tels que f soit bijective de A vers B.

1. Non, car 5 n'a aucun antécédent par f dans $[-5;5]$.
2. Non, car 3 a deux antécédents par f dans $[-5;5]$.
3. Non, même argument que pour la question 1.
4. f est bijective de $[-5;1]$ vers $[0;4]$.
   On peut aussi proposer : f est bijective de $[1;5]$ vers $[2;4]$.

4

1. Proposer une fonction qui soit bijective de $[0;1]$ vers $[0;1]$.
2. Proposer une fonction qui soit bijective de $[0;1]$ vers $[0;2]$.
3. Proposer une fonction qui soit bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^-$.

1. $\boxed{\text{La fonction carré}}$ est bijective de $[0;1]$ vers $[0;1]$.
2. On cherche une fonction monotone sur $[0;1]$ qui vérifie au choix :
   (a) $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$.
   (b) $f(0) = 2$ et $f(1) = 0$.

   On peut chercher une fonction affine vérifiant le premier point.
   $f(x) = mx + p$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$.

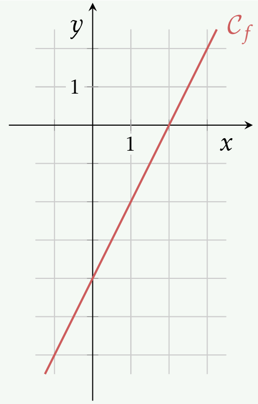
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot m + p = 0 \\ 1 \cdot m + p = 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

   La fonction affine $\boxed{f : x \mapsto 2x}$ convient.
3. On cherche une fonction monotone sur $\mathbb{R}^+$, qui soit négative sur $\mathbb{R}^+$ et qui prenne toutes les valeurs dans $\mathbb{R}^-$.
   La fonction $\boxed{f : x \mapsto -x}$ convient.
   Plus généralement, toutes les fonctions de la forme $f(x) = mx$ avec $m < 0$ conviennent.
   La fonction $f : x \mapsto -x^2$ également.

☆☆ **5** Soit $f : x \mapsto 2x - 4$.

1. Représenter f dans un repère orthonormé.
2. f est-elle bijective de $[0;1]$ vers $[0;1]$? *Justifier* ?
3. Proposer deux ensembles A et B tels que f soit bijective de A vers B.

1. On calcule deux images pour placer deux points, puis l'on sait que le graphe d'une fonction affine est une droite. Il suffit donc de relier les deux points ainsi placés et de prolonger.

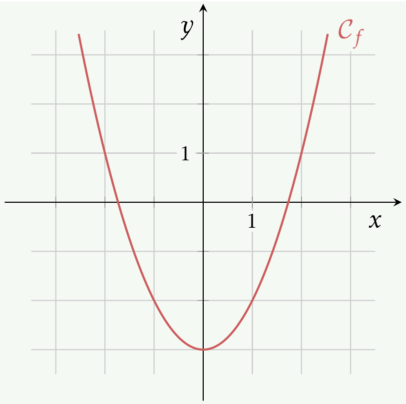


2. Non car 0 n'a pas d'antécédent par f dans $[0;1]$.
3. f est bijective de $[0;1]$ vers $[-4;-2]$.
   f est aussi bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

☆☆ **6** Soit $f : x \mapsto x^2 - 3$.

1. Représenter f dans un repère orthonormé.
2. f est-elle bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$? *Justifier*.
3. f est-elle bijective de $\mathbb{R}$ vers $[-3;+\infty[$? *Justifier*.
4. Écrire f sous la forme $f : \begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto x^2 - 3 \end{array}$ en remplaçant A et B de sorte que f soit bijective de A vers B. *Proposer deux cas différents*.

1. On dresse un tableau de valeurs entre -3 et 3 afin de placer plusieurs points appartenant au graphe de f. On sait également identifier des éléments caractéristiques d'une fonction polynôme du second dégré :
   - Le sommet a pour coordonnées $(\alpha;\beta)$, ici $(0;-3)$.
   - c est l'ordonnée à l'origine.
   - $a > 0$ donc le graphe est tourné vers le haut.



2. Non car, par exemple, -4 n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}$.
3. Non, car -2 a deux antécédent par f dans $\mathbb{R}$: -1 et 1.
4.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow [-3;+\infty[\\ x &\longmapsto x^2-3 \end{aligned}$$

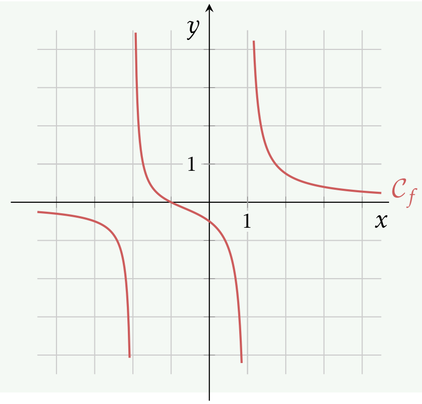
7 Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x+3}$.

1. Représenter f dans un repère orthonormé.
2. Déterminer A et B aussi grands que possibles tels que f soit bijective de A vers B.

8 Soit $f : x \mapsto \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}$.

1. Représenter f dans un repère orthonormé.
2. Donner deux cas de figure possibles d'ensembles A et B tels que f soit une bijection de A vers B.

1. $(x+2)(x-1)=0 \Leftrightarrow x+2=0$ ou $x-1=0 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=1$.
   Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\ ;\ 1\}$.
   On sait donc qu'il y aura une « coupure » dans le graphe en -2 et en 1.
   On dresse un tableau de valeurs afin de placer le plus de points possible.
   On oberve également que pour des valeurs de x très éloignées de 0 (par exemple -1000 et 1000), les images sont très proches de 0, sans jamais l'atteindre.
   On obtient au final le graphe suivant :



B Fonction réciproque

B.1 Faire ses gammes

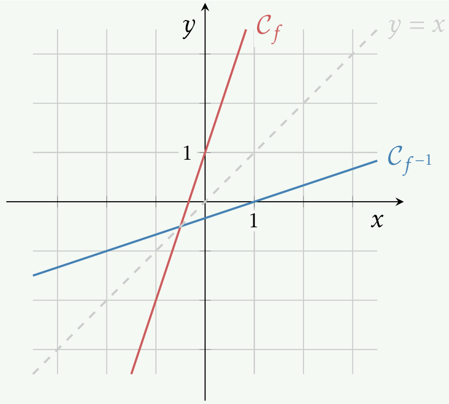
9 Soit $f : x \mapsto 3x+1$.

1. Recopier et compléter : « f est bijective de $\mathbb{R}$ vers ... ».
2. Déterminer la fonction réciproque de f.
3. Représenter les deux fonctions dans un même repère.
4. Déterminer $(f\circ f^{-1})(x)$

1. f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2.

$$\begin{aligned} y = 3x+1 &\Leftrightarrow y-1 = 3x \\ &\Leftrightarrow \frac{y-1}{3} = x \end{aligned}$$

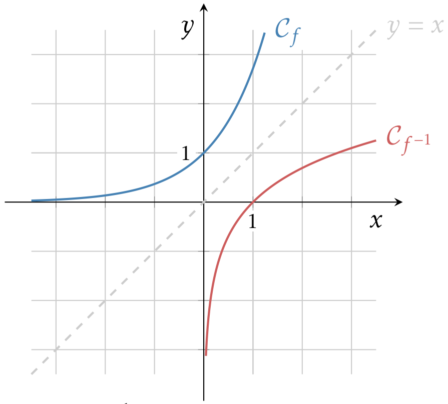
   Donc $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}}$.
3.



4.

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= 3 \cdot f^{-1}(x) + 1 \\ &= 3 \cdot \frac{x-1}{3} + 1 \\ &= x - 1 + 1 \\ &= x\end{aligned}$$

10 Soit f une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$ dont le graphe est tracé ci-dessous.



1. Recopier et compléter : « f^{-1} est bijection de ... vers ... ».
2. Tracer le graphe de f^{-1}.

1. f^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$.
2. *Voir graphique ci-dessus.* On choisit arbitrairement des points de $\mathscr{C}_f$ et on place leur symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ pour obtenir le graphe de f^{-1}.

11 Soit $f : x \mapsto x^2 + 3$.

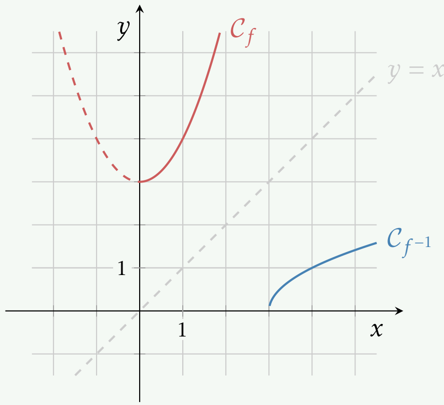
1. Recopier et compléter : « f est bijective de ... vers ... »
2. Déterminer la fonction réciproque de f.
3. Représenter les deux fonctions dans un repère.
4. Déterminer $(f \circ f^{-1})(x)$

1. f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $[3; +\infty[$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $y \in [3; +\infty[$:

$$\begin{aligned}y = x^2 + 3 &\Leftrightarrow x^2 = y - 3 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y-3}\end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(x) = \sqrt{x-3}$.
f^{-1} est une bijection de $[3; +\infty[$ vers $\mathbb{R}^+$.

3.



4. $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = \left(f^{-1}(x)\right)^2 + 3 = \sqrt{x-3}^2 + 3 = x - 3 + 3 = x$.

12 Dans chacun des cas, déterminer deux ensembles de départ et d'arrivée aussi grands que possible tels que f soit bijective, puis déterminer l'expression de f^{-1}.

1. $f(x) = 2x + 3$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = x^2 + 4$
4. $f(x) = \frac{1}{x}$
5. $f(x) = \sqrt{x+1}$
6. $f(x) = -5x + 2$
7. $f(x) = \frac{1}{x+2}$
8. $f(x) = \cos(x)$
9. $f(x) = \sin(x)$

1. f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = 2x+3 \\ &\Leftrightarrow -2x = 3-y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2} \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.

2. f est bijective de $\mathbb{R}^-$ vers $\mathbb{R}^+$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^-$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^+$: $y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = -x \Leftrightarrow x = -\sqrt{y}$.
Donc $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

3. f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $[4;+\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $y \in [4;+\infty[$:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x^2+4 \\ &\Leftrightarrow x^2 = y-4 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y-4} \end{aligned}$$

On en déduit $f^{-1}(x) = \sqrt{x-4}$.

4. f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$.
$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = x$.
$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

5. f est bijective de $[-1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}^+$.
Pour tout $x \in [-1;+\infty[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} y = \sqrt{x+1} &\Leftrightarrow y^2 = x+1 \\ &\Leftrightarrow x = y^2-1 \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(x) = x^2-1$.

6. f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
$y = -5x+2 \Leftrightarrow 5x = 2-y \Leftrightarrow x = \frac{2-y}{5}$.
Donc $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{5}$.

7. f est bijective de $]-2;+\infty[$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{x+2} &\Leftrightarrow \frac{1}{y} = x+2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{y}-2 \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}-2$.

8. f est bijective de $[0;\pi]$ vers $[-1;1]$.
$y = \cos(x) \Leftrightarrow x = \arccos(y)$.
$f^{-1}(x) = \arccos(x)$.

9. f est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1;1]$.
$y = \sin(x) \Leftrightarrow x = \arcsin(y)$.
$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$.

B.2 Exercices d'entraînement

★★☆☆ **13** Pour convertir des degrés Celsius en degrés Fahrenheit, on multiplie les degrés Celsius par $\frac{9}{5}$ puis on ajoute 32.

1. Si on note f la fonction qui à x degrés Celsius associe le nombre de dégrés Fahrenheit, quelle est l'expression de f ?
2. Préciser A et B aussi grands que possible tels que f soit bijective.
3. Déterminer la fonction permettant de retrouver les degrés Celsius connaissant des degrés Fahrenheit.

1. $f(x) = \frac{9}{5}x+32$.
2. f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
3.

$$\begin{aligned} y = \frac{9}{5}x+32 &\Leftrightarrow y-32 = \frac{9}{5}x \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{9}\big(y-32\big) = x \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x-32)}$.

★★★☆ **14** Soit $f : x \mapsto x^2+4x$.

1. Déterminer A et B aussi grands que possible tels que f soit une bijection de A vers B.
2. Écrire $f(x)$ sous forme canonique.
3. En déduire f^{-1}.

1. $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a = 1$, $b = 4$ et $c = 0$.
$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$.
De plus $a > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $[-2;+\infty[$.
$f(-2) = (-2)^2+4\cdot(-2) = 4-8 = -4$.

On en déduit que f est bijective de $[-2;+\infty[$ vers $[-4;+\infty[$.
Pour vous convaincre, tracer éventuellement le graphe de f.

2. On a trouvé $\alpha = -2$ et $\beta = -4$.
On en déduit :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)^2 + \beta \\ &= (x+2)^2 - 4 \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in [-2;+\infty[$ et pour tout $y \in [-4;+\infty[$:

$$\begin{aligned} y = x^2 + 4x &\Leftrightarrow y = (x+2)^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow y + 4 = (x+2)^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y+4} = x + 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y+4} - 2 = x \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} - 2}$.

15 Soit $f : x \mapsto x^2 + 4x - 5$.

1. Déterminer A et B aussi grands que possible tels que f soit une bijection de A vers B.
2. Déterminer f^{-1}.

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 4$ et $c = -5$.
$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$.
$\beta = f(\alpha) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$.
Donc le sommet de $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnées $(-2\ ;\ -9)$.
De plus $a > 0$, donc $\mathscr{C}_f$ est tournée vers le haut.
On en déduit, par exemple, que f est bijective de $[-2;+\infty[$ vers $[-9;+\infty[$.
2. On exprime $f(x)$ à l'aide de fonctions élémentaires. Autrement dit, il faut ici écrire $f(x)$ sous forme canonique.
On a calculé $\alpha = -2$ et $\beta = -9$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^2 - 9$.
Pour tout $x \in [-2;+\infty[$ et pour tout $y \in [-9;+\infty[$:

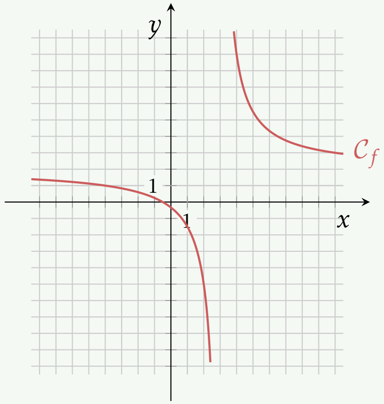
$$\begin{aligned} y = x^2 + 4x - 5 &\Leftrightarrow y = (x+2)^2 - 9 \\ &\Leftrightarrow y + 9 = (x+2)^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y+9} = x + 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y+9} - 2 = x \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\begin{aligned} f^{-1} : [-9;+\infty[&\longrightarrow [-2;+\infty[\\ x &\longmapsto \sqrt{x+9} - 2 \end{aligned}}$

16 Soit $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$.

1. Déterminer deux ensembles de départ et d'arrivée tels que f soit bijective.
2. Déterminer la fonction réciproque de f.
3. Représenter les deux fonctions dans un repère.

1. $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
En traçant le graphe, ou en calculant des images pour des valeurs très éloignées de 0, on s'aperçoit que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \neq 2$.



On peut voir que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
On peut aussi dire que f est une bijection de $]3;+\infty[$ vers $]2;+\infty[$.

2. On va poser $y = \frac{2x+1}{x-3}$ et chercher à exprimer x en fonction de x.
On effectue la division euclidienne de $2x + 1$ par $x - 3$.

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-3 \\ \hline -\ 2x+6 & 2 \\ \hline 7 & \end{array}$$

On en déduit que $2x + 1 = 2(x-3) + 7$.
On a donc $f(x) = \frac{2(x-3)+7}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} + \frac{7}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ et pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$\begin{aligned} y = \frac{2x+1}{x-3} &\Leftrightarrow y = 2 + \frac{7}{x-3} \\ &\Leftrightarrow y - 2 = \frac{7}{x-3} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y-2} = \frac{x-3}{7}$$
$$\Leftrightarrow \frac{7}{y-2} = x-3$$
$$\Leftrightarrow \frac{7}{y-2} + 3 = x$$
$$\Leftrightarrow \frac{3y+1}{y-2} = x$$

Donc $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}}$.