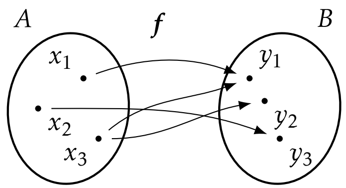
# 3 Bijections et fonctions réciproques

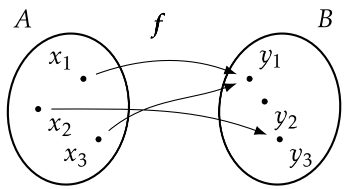
**Rappel 3.1.**

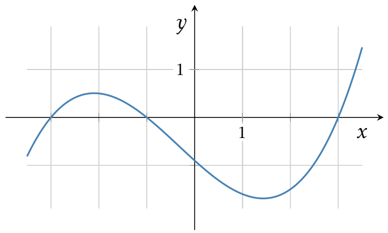
- On définit une ________ , ou ________ d'un ensemble $A$ vers un ensemble $B$ lorsque :
  1. chaque élément $x$ de $A$ a un élément $y$ de $B$ qui lui est associé.
     - ◇ $y$ est appelé ________ de $x$ par $f$
     - ◇ $x$ est appelé ________ , ou ________ de $y$ par $f$.
  2. aucun élément de $A$ n'est associé à plusieurs éléments de $B$.

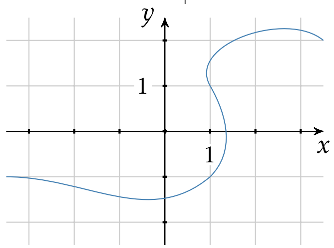
  Les points 1. et 2. signifient ainsi que chaque $x$ de $A$ ne doit être associé qu'à ________ élément $y$ de $B$.
- L'ensemble de départ d'une fonction $f$, est appelé ________ (ou ________ ) de $f$, et noté souvent ....
- La ________ ou ________ d'une fonction $f$ est l'ensemble des points de coordonnées ........, avec $x \in \mathcal{D}_f$. Il s'agit aussi de la courbe d'équation ........

**Exemple 3.1.** Dans chacun des cas, dire si $f$ définit une fonction et justifier :

1. 


2. 


3. 


4. 


**Exemple 3.2.** L'aire d'un carré est **fonction** de la longueur de son côté.
On peut alors appeler $f$ la fonction qui à toute longueur $x$ du côté du carré associe son aire. La fonction $f$ aura ici pour expression $f(x) = \ldots$.
Puisqu'une longueur et une aire sont toutes les deux nécessairement positives, la fonction $f$ est définie de $\mathbb{R}^+$ (longueur positive) dans $\mathbb{R}^+$ (aire positive). On peut alors résumer cela ainsi :

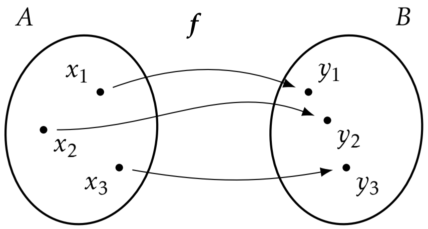
## I Bijection

**Définition 3.1 – Bijection**

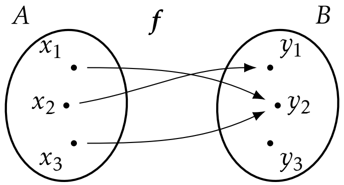
Soit $f$ une fonction de $A$ vers $B$.
$f$ est une ________ (ou ________ ) de $A$ vers $B$ si :

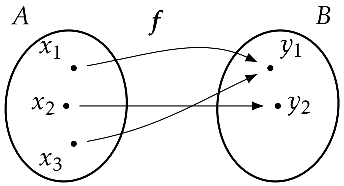
- chaque élément de $A$ est associé à un ________ élément de $B$.
- chaque élément de $B$ est associé à un ________ élément de $A$.

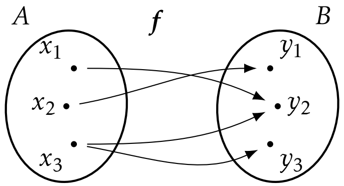
**Illustration**

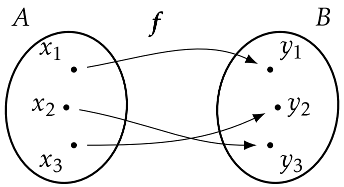



**Exemple 3.3.** Dans chacun des cas, dire si $f$ est une bijection de $A$ vers $B$.

1. 


2. 


3. 


4. 


**Exemple 3.4.**

1. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est-elle bijective ?

$$x \longmapsto x^2$$

2. Compléter : « la fonction carré est une bijection de ... vers ... ».

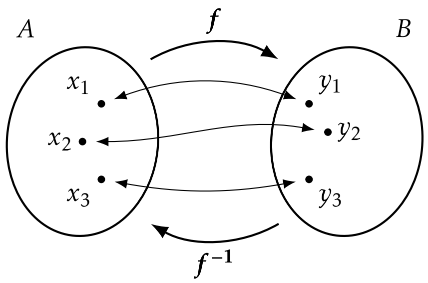
## II Fonction réciproque

**Définition 3.2**

Soit $f$ une bijection de $A$ vers $B$.
Il existe une fonction de $B$ vers $A$ appelée ________________ et notée ... telle que :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Illustration**



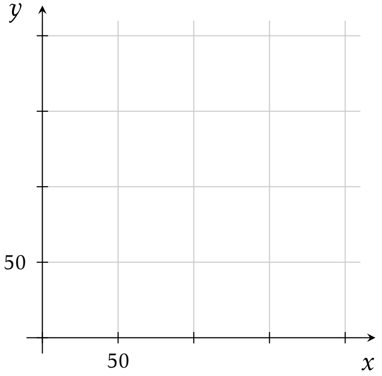

**Propriété 3.1**

Soit $f$ une fonction de $A$ vers $B$.
$f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ de $B$ vers $A$ si et seulement si $f$ est une bijection de $A$ vers $B$.

**Exemple 3.5.** Vous louez une voiture. La location est facturée 50 CHF, puis vous payez 0,5 CHF par kilomètre parcouru.
On note $f$ la fonction qui au nombre de kilomètres parcourus $x$ associe la facture.

1. Quelle est l'expression de $f$ ?

2. On aimerait maintenant pouvoir retrouver le nombre de kilomètres parcourus, connaissant la facture.
   (a) Tracer le graphe de $f$ dans le repère ci-dessous.




(b) Compléter : « $f$ est une bijection de ... dans ......... ».

(c) $f$ admet donc une fonction réciproque, définie de ......... vers .... Déterminer l'expression de $f^{-1}$.

(d) Combien de kilomètres a-t-on parcouru si la facture est de 76 CHF ?

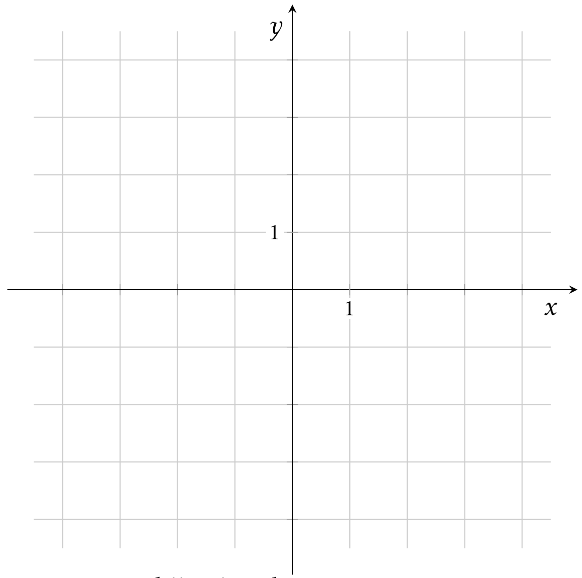
# III Représentation graphique de fonctions réciproques

***Propriété 3.2***

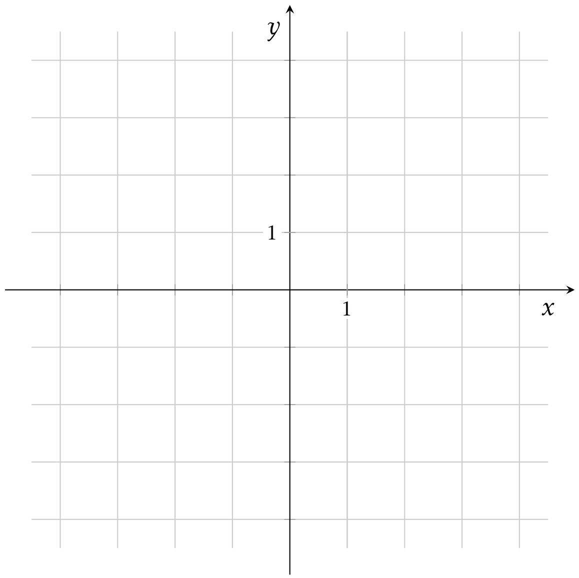
Soit $f$ une bijection et $f^{-1}$ sa réciproque.
Les graphes de $f$ et $f^{-1}$ sont _______________ par rapport à la droite d'équation .....

**Exemple 3.6.** Soit $f : x \mapsto x+3$ et $g : x \mapsto x^2$.

1. (a) Compléter : « $f$ est une bijection de ... vers ... ».
   (b) Déterminer l'expression de $f^{-1}$.
   (c) Représenter $f$ et $f^{-1}$ dans le repère ci-dessous.




2. (a) Compléter : « $g$ est une bijection de ... vers ... ».
   (b) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$.
   (c) Représenter $g$ et $g^{-1}$ dans le repère ci-dessous.


y
1
1
x