A Composition de fonctions

1 Dans chacun des cas, déterminer l'expression et le domaine de définition de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

1. $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 2x + 1$
3. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x - 3$
4. $f(x) = \frac{1}{x+8}$ et $g(x) = x^3$

1. $(f \circ g)(x) = \boxed{x^2 + 1}$. $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}}$.

   $(g \circ f)(x) = \boxed{(x+1)^2}$. $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R}}$.

2. - $(f \circ g)(x) = \boxed{\dfrac{1}{2x+1}}$.
     $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.
     $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.
     $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}}$.
   - $(g \circ f)(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} + 1 = \boxed{\dfrac{2}{x} + 1}$.
     $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
     Donc $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R}^*}$.

3. - $(f \circ g)(x) = \boxed{\sqrt{x-3}}$.
     $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.
     $g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$.
     $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} = [3;+\infty[}$.
   - $(g \circ f)(x) = \boxed{\sqrt{x} - 3}$.
     $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$.
     Donc $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R}^+}$.

4. - $(f \circ g)(x) = \boxed{\dfrac{1}{x^3+8}}$.
     $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.
     $g(x) = -8 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$.
     Donc $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}}$.
   - $(g \circ f)(x) = \boxed{\left(\dfrac{1}{x+8}\right)^3}$.
     $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$.
     Donc $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-8\}}$.

2 Dans chacun des cas, déterminer l'expression et le domaine de définition de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

1. $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2$
2. $f(x) = 4 - 2x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$
3. $f(x) = 1 + 3x$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$
4. $f(x) = |x|$ et $g(x) = 4x - 5$
5. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = |x|$
6. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ et $g(x) = 2 + x$

1. - $(f \circ g)(x) = \boxed{3x^2 + 1}$.
     $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}}$.
   - $(g \circ f)(x) = \boxed{(3x+1)^2}$.
     $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R}}$.

2. - $(f \circ g)(x) = 4 - 2 \cdot \frac{1}{x} = \boxed{4 - \dfrac{2}{x}}$.
     $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}^*}$.
   - $(g \circ f)(x) = \boxed{\dfrac{1}{4-2x}}$.
     $4 - 2x = 0 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$.
     Donc $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$.

3. - $(f \circ g)(x) = \boxed{1 + 3\sqrt{x+1}}$.
     $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$.
     Donc $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} = [-1;+\infty[}$.
   - $(g \circ f)(x) = \sqrt{1 + 3x + 1} = \boxed{\sqrt{3x+2}}$.
     $3x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 3x \geqslant -2 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{2}{3}$.
     Donc $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \left[-\dfrac{2}{3};+\infty\right[}$.

4. - $(f \circ g)(x) = \boxed{|4x - 5|}$.
     $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}}$.

- $(g\circ f)(x) = \boxed{4|x|-5}$.
  $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R}}$.

5. - $(f\circ g)(x) = \boxed{\dfrac{1}{|x|-1}}$.
   $|x|-1=0 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$.
   Donc $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}\setminus\{-1\ ;\ 1\}}$.
   - $(g\circ f)(x) = \boxed{\left|\dfrac{1}{x-1}\right|}$.
   $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.
   Donc $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R}\setminus\{1\}}$.

6. - $(f\circ g)(x) = \boxed{\sqrt{(2+x)^2-9}}$.

$$\begin{aligned}(2+x)^2-9\geqslant 0 &\Leftrightarrow 4+4x+x^2-9\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow x^2+4x-5\geqslant 0\end{aligned}$$

   $x^2+4x-5 = ax^2+bx+c$ avec $a=1$, $b=4$ et $c=-5$.
   $\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\cdot 1\cdot(-5) = 36$.
   $\Delta>0$ donc x^2+4x-5 a deux racines réelles.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{36}}{2\cdot 1} = -5 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{36}}{2\cdot 1} = 1$$

   On rappelle qu'un polynôme du second degré est du signe de a, sauf entre ses racines, si elles existent.
   Ici $a=1>\mathbf{0}$.
   On en déduit :

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
x^2+4x-5		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} =]-\infty;-5]\cup[1;+\infty[}$

   - $(g\circ f)(x) = \boxed{2+\sqrt{x^2-9}}$.
   $x^2-9=(x+3)(x-3)$, donc les racines de x^2-9 sont -3 et 3.
   On en déduit que x^2-9 est positif sur $]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[$.
   Donc $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} =]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[}$.

3 Soient $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto x-2$ et $h : x \mapsto -\frac{3}{x}$.
Déterminer l'expression et l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f \circ g$
2. $g \circ f$
3. $f \circ g \circ h$
4. $f \circ h \circ g$
5. $g \circ f \circ h$
6. $g \circ h \circ f$
7. $h \circ f \circ g$
8. $h \circ g \circ f$

1. $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x-2) = \boxed{(x-2)^2}$.
   Donc $\boxed{\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbb{R}}$.
2. $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(x^2\big) = \boxed{x^2-2}$.
   $\boxed{\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}}$.
3. $(g \circ h)(x) = -\frac{3}{x} - 2$.
   $\big(f \circ g \circ h\big)(x) = f\big((g \circ h)(x)\big) = \boxed{\left(-\dfrac{3}{x} - 2\right)^2}$.
   $\boxed{\mathcal{D}_{f \circ g \circ h} = \mathbb{R}^*}$.
4. $\big(h \circ g\big)(x) = -\frac{3}{x-2}$.
   $\big(f \circ h \circ g\big)(x) = f\big((h \circ g)(x)\big) = \boxed{\left(-\dfrac{3}{x-2}\right)^2}$.
   $\boxed{\mathcal{D}_{f \circ h \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$.
5. $(f \circ h)(x) = \left(-\frac{3}{x}\right)^2$.
   $\big(g \circ f \circ h\big)(x) = g\big((f \circ h)(x)\big) = \boxed{\left(-\dfrac{3}{x}\right)^2 - 2}$.
   $\boxed{\mathcal{D}_{g \circ f \circ h} = \mathbb{R}^*}$.
6. $(h \circ f)(x) = -\frac{3}{x^2}$.
   $\big(g \circ h \circ f\big)(x) = g\big((h \circ f)(x)\big) = \boxed{-\dfrac{3}{x^2} - 2}$.
   $\boxed{\mathcal{D}_{g \circ h \circ f} = \mathbb{R}^*}$.
7. $(f \circ g)(x) = (x-2)^2$.
   $\big(h \circ f \circ g\big)(x) = h\big((f \circ g)(x)\big) = \boxed{-\dfrac{3}{(x-2)^2}}$.
   $\boxed{\mathcal{D}_{h \circ f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$.
8. $(g \circ f)(x) = x^2 - 2$.
   $\big(h \circ g \circ f\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = \boxed{-\dfrac{3}{x^2-2}}$.
   $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.
   Donc $\boxed{\mathcal{D}_{h \circ g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \big\{-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\big\}}$.

4 Soient $f : x \mapsto x^3$, $g : x \mapsto 1-x$ et $h : x \mapsto \sqrt{x}$.
Déterminer l'expression et l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f \circ g$
2. $g \circ f$
3. $f \circ g \circ h$
4. $f \circ h \circ g$
5. $g \circ f \circ h$
6. $g \circ h \circ f$
7. $h \circ f \circ g$
8. $h \circ g \circ f$

1.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f\big(g(x)\big) \\ &= \big(g(x)\big)^3 \\ &= \boxed{(1-x)^3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbb{R}}$$

2.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) \\ &= 1 - f(x) \\ &= \boxed{1 - x^3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}}$$

3.

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f\big((g \circ h)(x)\big) \\ &= \big((g \circ h)(x)\big)^3 \\ &= \Big(g\big(h(x)\big)\Big)^3 \\ &= \boxed{\left(1 - \sqrt{x}\right)^3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_{f \circ g \circ h} = \mathbb{R}^+}$$

4.

$$(f \circ h \circ g)(x) = f\big((h \circ g)(x)\big)$$

On calcule $(h \circ g)(x)$:

$$\begin{aligned}(h \circ g)(x) &= h\big(g(x)\big)\\ &= \sqrt{g(x)}\\ &= \sqrt{1-x}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}f\big((h \circ g)(x)\big) &= \big((h \circ g)(x)\big)^3\\ &= \boxed{\sqrt{1-x}^3}\end{aligned}$$

Cette expression contient une racine carrée.
La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}1 - x \geqslant 0 &\Leftrightarrow -x \geqslant -1\\ &\Leftrightarrow x \leqslant 1\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_{f \circ h \circ g} =]-\infty; 1]}$.

5.

$$\begin{aligned}(g \circ f \circ h)(x) &= g\big((f \circ h)(x)\big)\\ &= g\Big(f\big(h(x)\big)\Big)\\ &= g\Big(\big(h(x)\big)^3\Big)\\ &= g\big(\sqrt{x}^3\big)\\ &= \boxed{1 - \sqrt{x}^3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{D}_{g o f o h} = \mathbb{R}^+}$$

6.

$$\begin{aligned}(g \circ h \circ f)(x) &= g\big((h \circ f)(x)\big)\\ &= g\Big(h\big(f(x)\big)\Big)\\ &= g\Big(h\big(x^3\big)\Big)\\ &= g\big(\sqrt{x^3}\big)\\ &= \boxed{1 - \sqrt{x^3}}\end{aligned}$$

$x^3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
Donc $\boxed{\mathcal{D}_{g o h o f} = \mathbb{R}^+}$

7.

$$\begin{aligned}(h \circ f \circ g)(x) &= h\big((f \circ g)(x)\big)\\ &= h\big((1-x)^3\big)\\ &= \boxed{\sqrt{(1-x)^3}}\end{aligned}$$

$(1-x)^3 \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow -x \geqslant -1 \Leftrightarrow x \leqslant 1$.
Donc $\boxed{\mathcal{D}_{h o f o g} =]-\infty; 1]}$.

8.

$$\begin{aligned}(h \circ g \circ f)(x) &= h\big((g \circ f)(x)\big)\\ &= h\big(1 - x^3\big)\\ &= \boxed{\sqrt{1 - x^3}}\end{aligned}$$

$1 - x^3 \geqslant 0 \Leftrightarrow -x^3 \geqslant -1 \Leftrightarrow x^3 \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant 1$.
Donc $\boxed{\mathcal{D}_{h o g o f} =]-\infty; 1]}$.

B Décomposition de fonctions

★☆☆ **5** Décomposer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires.

1. $f(x) = 5x^2$ 2. $f(x) = \frac{1}{x+3}$ 3. $f(x) = \sqrt{2x}$ 4. $f(x) = (x+1)^3$

1. On peut dessiner le schéma suivant :

$$x \xmapsto{f_1} x^2 \xmapsto{f_2} 5x^2$$

Où : $f_1(x) = x^2$ et $f_2(x) = 5x$.
$f(x) = \big(f_2 \circ f_1\big)(x)$.

2. $f(x) = \big(f_2 \circ f_1\big)(x)$ avec $\begin{cases} f_1(x) = x+3 \\ f_2(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

3. $f(x) = \big(f_2 \circ f_1\big)(x)$ avec $\begin{cases} f_1(x) = 2x \\ f_2(x) = \sqrt{x} \end{cases}$.

4. $f(x) = \big(f_2 \circ f_1\big)(x)$ avec $\begin{cases} f_1(x) = x+1 \\ f_2(x) = x^3 \end{cases}$.

5. $f(x) = \big(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1\big)(x)$ avec $\begin{cases} f_1(x) = x+7 \\ f_2(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_3(x) = 4x \\ f_4(x) = \sqrt{x} \end{cases}$.

6. $f(x) = \big(f_3 \circ f_2 \circ f_1\big)(x)$ avec $\begin{cases} f_1(x) = -x \\ f_2(x) = x+1 \\ f_3(x) = x^3 \end{cases}$.

7. $f(x) = \big(f_3 \circ f_2 \circ f_1\big)(x)$ avec $\begin{cases} f_1(x) = 2x \\ f_2(x) = x+1 \\ f_3(x) = x^3 \end{cases}$.

8. $f(x) = \big(f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1\big)(x)$ avec $\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = -3x \\ f_3(x) = x+5 \\ f_4(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_5(x) = x+1 \\ f_6(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

★★ **6** Décomposer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires.

1. $f(x) = 2(x+2)^2$
2. $f(x) = \frac{1}{x+2} + 2$
3. $f(x) = \frac{2}{x^2}$
4. $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}+4}$
5. $f(x) = \sqrt{\frac{4}{x+7}}$
6. $f(x) = (1-x)^3$
7. $f(x) = (2x+1)^3$
8. $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{5-\frac{3}{x}}}$

1.

$$x \overset{f_1}{\longmapsto} x+2 \overset{f_2}{\longmapsto} (x+2)^2 \overset{f_3}{\longmapsto} 2(x+2)^2$$

$f(x) = \big(f_3 \circ f_2 \circ f_1\big)(x)$ avec $\begin{cases} f_1(x) = 2+x \\ f_2(x) = x^2 \\ f_3(x) = 2x \end{cases}$

2. $f(x) = \big(f_3 \circ f_2 \circ f_1\big)(x)$ avec $\begin{cases} f_1(x) = x+2 \\ f_2(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_3(x) = x+2 \end{cases}$.

3. $f(x) = \big(f_3 \circ f_2 \circ f_1\big)(x)$ avec $\begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_3(x) = 2x \end{cases}$.

4. $f(x) = \big(f_3 \circ f_2 \circ f_1\big)(x)$ avec $\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = x+4 \\ f_3(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

★★ **7** Décomposer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires.

1. $f(x) = -3(x-5)^4$
2. $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$
3. $f(x) = \frac{1}{2x+3}$
4. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x}+1}}$
5. $f(x) = -3\sqrt{x^2+1}$
6. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$
7. $f(x) = (2-x)^5$
8. $f(x) = \sqrt{8-x^2}$

1.

$$x \overset{f_1}{\longmapsto} x-5 \overset{f_2}{\longmapsto} (x-5)^4 \overset{f_3}{\longmapsto} -3(x-5)^4$$

$f(x) = \big(f_3 \circ f_2 \circ f_1\big)(x)$, avec $\begin{cases} f_1(x) = x-5 \\ f_2(x) = x^4 \\ f_3(x) = -3x \end{cases}$

2.

$$x \overset{f_1}{\longmapsto} x^2 \overset{f_2}{\longmapsto} x^2+1 \overset{f_3}{\longmapsto} \frac{1}{x^2+1} \overset{f_4}{\longmapsto} \frac{4}{x^2+1}$$

$$f(x) = \left(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1\right)(x), \text{ avec } \begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = x+1 \\ f_3(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_4(x) = 4x \end{cases}$$

3.

$$x \overset{f_1}{\longmapsto} 2x \overset{f_2}{\longmapsto} 2x+3 \overset{f_3}{\longmapsto} \frac{1}{2x+3}$$

$$f(x) = \left(f_3 \circ f_2 \circ f_1\right)(x), \text{ avec } \begin{cases} f_1(x) = 2x \\ f_2(x) = x+3 \\ f_3(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

4.

$$x \overset{f_1}{\longmapsto} \frac{1}{x} \overset{f_2}{\longmapsto} \frac{1}{x}+1 \overset{f_3}{\longmapsto} \frac{1}{\frac{1}{x}+1} \overset{f_4}{\longmapsto} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x}+1}}$$

$$f(x) = \left(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1\right)(x), \text{ avec } \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = x+1 \\ f_3(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_4(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

5.

$$x \overset{f_1}{\longmapsto} x^2 \overset{f_2}{\longmapsto} x^2+1 \overset{f_3}{\longmapsto} \sqrt{x^2+1} \overset{f_4}{\longmapsto} -3\sqrt{x^2+1}$$

$$f(x) = \left(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1\right)(x), \text{ avec } \begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = x+1 \\ f_3(x) = \sqrt{x} \\ f_4(x) = -3x \end{cases}$$

6.

$$x \overset{f_1}{\longmapsto} x^2 \overset{f_2}{\longmapsto} x^2+1 \overset{f_3}{\longmapsto} \frac{1}{x^2+1} \overset{f_4}{\longmapsto} \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$$

$$f(x) = \left(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1\right)(x), \text{ avec } \begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = x+1 \\ f_3(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_4(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

7.

$$x \overset{f_1}{\longmapsto} -x \overset{f_2}{\longmapsto} 2-x \overset{f_3}{\longmapsto} (2-x)^5$$

$$f(x) = \left(f_3 \circ f_2 \circ f_1\right)(x), \text{ avec } \begin{cases} f_1(x) = -x \\ f_2(x) = x+2 \\ f_3(x) = x^5 \end{cases}$$

8.

$$x \overset{f_1}{\longmapsto} x^2 \overset{f_2}{\longmapsto} -x^2 \overset{f_3}{\longmapsto} 8-x^2 \overset{f_4}{\longmapsto} \sqrt{8-x^2}$$

$$f(x) = \left(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1\right)(x), \text{ avec } \begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = -x \\ f_3(x) = x+8 \\ f_4(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$