1 Équations polynômiales

L'objectif de ce chapitre est de résoudre des équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 2.
Nous allons pour cela voir différentes manières de se ramener, par factorisation, à des équations que l'on sait résoudre.

Rappel 1.1.

1. $P(x)$ est un polynôme s'il existe $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}$, tels que :
$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_2x^2 + c_1x + c_0$$
2. Le **degré** de $P(x)$ est le plus grand entier d tel que $c_d \neq 0$.
3. Soit (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:
Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.
   (a) Si $\Delta > 0$, alors (E) a deux solutions :
   $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
   (b) Si $\Delta = 0$, alors (E) a une unique solution :
   $$x_0 = -\frac{b}{2a}$$
   (c) Si $\Delta < 0$, alors (E) n'a pas de solution réelle.

I Identités remarquables

Rappel 1.2. Identités remarquables :

1. $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$
2. $x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$
3. $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$

Propriété 1.1

1. $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$
2. (a) $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3$
   (b) $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = (x-a)^3$
3. (a) $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$
   (b) $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$

Exemple 1.1. Résoudre les équations suivantes par factorisation :

1. $x^2 - 16 = 0$
$$\begin{aligned} x^2 - 16 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 4^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+4)(x-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+4=0 \quad \text{ou} \quad x-4=0 \\ &\Leftrightarrow x=-4 \quad \text{ou} \quad x=4 \end{aligned}$$
$$S = \{-4\,;\,4\}$$
2. $2t^2 = -5t + t^3$
3. $4x^2 - 9 = 0$
$$\begin{aligned} 4x^2 - 9 = 0 &\Leftrightarrow (2x)^2 - 3^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x+3)(2x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x+3=0 \quad \text{ou} \quad 2x-3=0 \\ &\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{3}{2} \end{aligned}$$
$$S = \left\{-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right\}$$
4. $3x^2 + 3 = 6x$
$$\begin{aligned} 3x^2 + 3 = 6x &\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x^2 - 2x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$
5. $x^2 + 5x + 6 = 0$
$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + (2+3)x + 2\cdot 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+2=0 \quad \text{ou} \quad x+3=0 \\ &\Leftrightarrow x=-2 \quad \text{ou} \quad x=-3 \end{aligned}$$
$$S = \{-3\,;\,-2\}$$

6. $3x^3 - 18x^2 + 36x - 24 = 0$

$$\begin{aligned}
3x^3 - 18x^2 + 36x - 24 = 0 &\Leftrightarrow 3(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^3 - 3 \cdot 2 \cdot x^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot x - 2^3 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-2)^3 = 0 \\
&\Leftrightarrow x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 2
\end{aligned}$$

$$S = \{2\}$$

Exercices : A

II Factorisation par division euclidienne

II.1 Introduction

Propriété 1.2 – Division euclidienne de polynômes

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes, avec $B(x) \neq 0$.
Il existe $Q(x)$ et $R(x)$ tels que :

$$A(x) = \boldsymbol{B(x) \cdot Q(x) + R(x)}$$

avec $0 \leqslant \deg\big(R(x)\big) < \deg\big(B(x)\big)$.
$Q(x)$ et $R(x)$ sont respectivement appelés **quotient** et **reste** de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ et sont uniques.

Propriété 1.3

Soit $A(x)$ un polynôme et α un réel.
Si α est une racine de $A(x)$, alors il existe un polynôme $Q(x)$ tel que :

$$A(x) = \boldsymbol{(x-\alpha)Q(x)}$$

Remarque 1.1. Autrement dit si α est une racine d'un polynôme $A(x)$, alors on peut factoriser ce polynôme par $(x-\alpha)$.
Pour cela, il faut effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $(x-\alpha)$. Nous allons voir deux méthodes pour effectuer cette division.

II.2 Méthode 1 : division classique

Rappel 1.3. Poser la division euclidienne de 154 par 4.

$$\begin{array}{lrl|ll}
\text{dividende} & & 1\,5\,4 & 4 & \text{diviseur} \\
\cline{4-4}
 & - & \underline{1\,2} & 3\,8 & \\
 & & 3\,4 & & \\
 & - & \underline{3\,2} & & \\
\text{reste} & & 2 & & \text{quotient}
\end{array}$$

Méthode 1.1. On pose la division euclidienne avec une logique similaire à celle des nombres entiers.
On procède en faisant en sorte d'annuler à chaque étape le monôme de plus haut degré.

Illustration

Soit $A(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ et $B(x) = x + 3$.
On effectue ci-contre la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$.
Notons $Q(x)$ le quotient. On trouve :

$$Q(x) = x^2 - 6x + 24$$

Notons $R(x)$ le reste. On trouve :

$$R(x) = -71$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -3x^2 & +6x & +1 & x+3 \\
\cline{5-5}
-x^3 & -3x^2 & & & x^2 - 6x + 24 \\
\cline{1-2}
 & -6x^2 & +6x & & \\
 & 6x^2 & +18x & & \\
\cline{2-3}
 & & 24x & +1 & \\
 & & -24x & -72 & \\
\cline{3-4}
 & & & -71 &
\end{array}$$

On en déduit :

$$\underbrace{x^3 - 3x^2 + 6x + 1}_{A(x)} = (\underbrace{x+3}_{B(x)})\underbrace{(x^2 - 6x + 24)}_{Q(x)} \underbrace{-71}_{R(x)}$$

Exemple 1.2. Soit $A(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$.

1. Déterminer une racine évidente de $A(x)$.
   $A(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1 = 0$.
   Donc 1 est une racine de $A(x)$.
2. Factoriser $A(x)$.
   On en déduit qu'on peut factoriser $A(x)$ par $(x-1)$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +3x^2 & -5x & +1 & x-1 \\
\cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2+4x-1 \\
\cline{1-2}
 & 4x^2 & -5x & & \\
 & -4x^2 & +4x & & \\
\cline{2-3}
 & & -x & +1 & \\
 & & x & -1 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Donc $A(x) = (x-1)(x^2+4x-1)$.

3. Résoudre $A(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
A(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow x-1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2+4x-1 = 0
\end{aligned}
$$

Étudions x^2+4x-1.
$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 20$.
$\Delta > 0$, donc x^2+4x-1 a deux racines réelles.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-4-\sqrt{20}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{-4-2\sqrt{5}}{2} \\
&= -2-\sqrt{5}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{-4+\sqrt{20}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{-4+2\sqrt{5}}{2} \\
&= -2+\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Ainsi, finalement :

$$S = \left\{-2-\sqrt{5}\ ;\ -2+\sqrt{5}\ ;\ 1\right\}$$

II.3 Méthode 2 : schéma de Hörner

Nous n'effectuons avec cette méthode que des divisions par des polynômes de la forme $(x-\alpha)$.

Méthode 1.2. Pour simplifier, considérons un polynôme de degré 3 : $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
Nous souhaitons effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-\alpha)$.
Il s'agit donc de trouver $Q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ tel que $P(x) = (x-\alpha)Q(x) + R$, avec $R \in \mathbb{R}$. Dans le cas où α est une racine de $P(x)$, on aura $R = 0$.
Le schéma de Hörner permet de trouver facilement les coefficients b_2, b_1 et b_0, appelés **coefficients de Hörner**.
Le premier coefficient b_2, est le coefficient du monôme de plus haut degré, soit a_3.
On procède ensuite comme suit :

1. on multiplie le coefficient de Hörner précédent par α puis on lui ajoute le coefficient suivant du polynôme de départ.
2. on répète le processus jusqu'à trouver b_0, puis la valeur de K.

Avec un polynôme de degré 3, cela donne :

- $b_2 = a_3$.
- $b_1 = \alpha b_2 + a_2$.
- $b_0 = \alpha b_1 + a_1$.
- $R = \alpha b_0 + a_0$.

Illustration

Effectuons la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ avec :

- $A(x) = x^3 - 3x^2 - 1$
- $B(x) = x - 2$

On obtient grâce au schéma de Hörner :

$$
\begin{array}{cc|cccc}
 & & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & & 1 & -3 & 0 & -1 \\
\alpha & 2 & \downarrow & 2 & -2 & -4 \\
\hline
 & & 1 & -1 & -2 & -5 \\
 & & b_2 & b_1 & b_0 & R
\end{array}
$$

- $Q(x) = x^2 - x - 2$
- $R(x) = -5$

On a donc :

$$\underbrace{x^3-3x^2-1}_{A(x)} = \underbrace{(x-2)}_{B(x)}\underbrace{(x^2-x-2)}_{Q(x)}\ \underbrace{-5}_{R(x)}$$

Exemple 1.3. Résoudre l'équation $2x^3 + x + 3 = 0$.

$2 \cdot (-1)^3 + (-1) + 3 = 0$.
Donc -1 est une racine de $2x^3 + x + 3$.
Donc on peut factoriser $2x^3 + x + 3$ par $x + 1$.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 0 & 1 & 3 \\
-1 & \downarrow & -2 & 2 & -3 \\
\hline
 & 2 & -2 & 3 & 0
\end{array}
$$

Donc $2x^3 + x + 3 = (x+1)(2x^2 - 2x + 3)$.
Ainsi :

$$
\begin{aligned}
2x^3 + x + 3 = 0 &\Leftrightarrow (x+1)(2x^2-2x+3) = 0 \\
&\Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x^2-2x+3 = 0
\end{aligned}
$$

Étudions $2x^2 - 2x + 3$.
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20$.

$\Delta < 0$, donc $2x^2 - 2x + 3$ n'a pas de racine réelle.
Donc finalement :

$$S = \{-1\}$$

Exercices : B