

Kholles ECS2 défi : 05/10/21

Robin Loris

1. Question de cours : Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'un endomorphisme.

Soit n un entier de \mathbb{N}^* et soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose l'existence d'un réel k tel que ${}^tAA + A{}^tA = kI$.

2. On pose : $S = {}^tAA + A{}^tA$, et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $q(X) = {}^tXSX$.

Étudier le signe de $q(X)$ et en déduire que $k \geq 0$.

3. On suppose que $k = 0$. Montrer que $A = 0$.

On suppose dorénavant que $k > 0$.

4. Soit f et g les endomorphismes de \mathbb{R}^n ayant pour matrices respectives, A et tA dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

Établir la relation : $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \{0\}$.

5. On pose : $B = {}^tAA$. Soit λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé.

a) Montrer que $\lambda \geq 0$.

b) Montrer que X est un vecteur propre de la matrice $A{}^tA$ pour une valeur propre μ que l'on précisera.

En déduire que $\lambda \in [0, k]$.

c) On suppose dans cette question que $\lambda \in]0, k[$. Montrer que les vecteurs AX et tAX sont des vecteurs propres de B pour la valeur propre μ .

d) On se place dans la situation de la question c). On note E_λ et E_μ les sous-espaces propres de la matrice B pour les valeurs propres λ et μ respectivement. On note φ l'application de E_λ dans E_μ définie par $\varphi(X) = AX$.

Montrer que l'application φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Que peut-on dire si $\lambda = 0$ ou $\lambda = k$?