

1 Questions de cours

Démontrer qu'une fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle.

2 Exercices

1. Calculer les intégrales suivantes :

(a)

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt$$

(b)

$$\int_1^2 \ln(t) dt$$

(c)

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

2. Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

(a) $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$

(b) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}$

(c) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

3. (a) Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* .

(b) Déterminer la limite de f en 0.

4. Étudier les limites de $(\prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n}))^{\frac{1}{n}}$ et de $(\prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n^2}))^{\frac{1}{n}}$

5. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer

$$|\int_a^b f(t) dt| = \int_a^b |f(t)| dt \text{ si, et seulement si } f \geq 0 \text{ ou } f \leq 0$$

6. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in C^0([a, b], \mathbb{C})$.

À quelle condition portant sur f a-t-on

$$|\int_a^b f| = \int_a^b |f| ?$$