Kholles MP C : 11/10/2021

1 Questions de cours

Montrer la continuité sur I de l'application $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ si f est continue par morceaux sur l'intervalle I, avec $a \in I$.

2 Exercices

1. Calculer les intégrales suivantes :
   (a)
   $$\int_1^e \frac{1}{t+t(ln(t))^2}\, dt$$
   (b)
   $$\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{ln(t)+1}}\, dt$$
   (c)
   $$\int_0^1 \frac{1}{e^t+1}\, dx$$
2. En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$
3. (a) Calculer
   $$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$
   (b) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\, dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$$
   (c) Justifier :
   $$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\, dt = \frac{1}{2n+3}$$
   (d) En déduire :
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \to \frac{\pi}{4}$$
4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que
   $$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$$
   Montrer que f admet un point fixe.
5. Calculer
   $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1+tan(x))\, dx$$