Kholles C MP 04/10/21

1 Questions de cours

Énoncer et démontrer le théoreme de la limite de la dérivée.

2 Exercices

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que l'équation $e^x = P(x)$ ne peut avoir qu'un nombre fini de solutions réelles.
2. Dans la suite, on admettra l'égalité de Taylor Lagrange :
   Soit f une fonction $C^{n+1}([a,b])$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

   $$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + (b-a)^{(n+1)}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

   On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, 2 fois dérivable et telle que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. On note $M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ et $M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''|$.

   (a) Que dire de f si $M_2 = 0$?

   (b) On suppose dans la suite que $M? > 0$. On considère l'application g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$; Montrer que g admet un minimum global et préciser sa valeur.

   (c) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, pour tout h de $\mathbb{R}_+^*$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

   $$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f''(c)\frac{h}{2}$$

   (d) Montrer que $|f'(x)| \leq g(h)$. En d{eduire que f' est bornée et que :

   $$\sup_{\mathbb{R}} |f'| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$$

   (e) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, pour tout h de $\mathbb{R}_+^*$, il existe c et d dans $\mathbb{R}$ tel que :

   $$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - (f''(c) - f''(d))\frac{h}{2}$$

   En déduire une meilleur majoration de $|f'|$.
3. Soit $a > 0$ et f une fonction rélles continues sur $[0;a]$ et dérivable sur $]0;a]$. On suppose que $f(0) = 0$ et

   $$f(a)f'(a) < 0$$

   Montrer qu'il existe $c \in]0;a[$ tel que $f'(c) = 0$.
4. À l'aide du th. des accroissements finis, montrer que

   $$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{ln(n)}{n^2}$$

5. (BONUS) Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ de classe C^2 telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction g éfinie sur $\mathbb{R}_+$ de classe C^1 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x^2) = f(x)$.