Kholles : 15/10/20

Robin Loris

1 Exercices

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$.
   (b) La matrice A est elle diagonalisable dans $\mathbb{R}^3$?
   (c) Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Déterminer P inversible et D diagonale, dans $M_3(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$.
2. Pour tout entier n non nul, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.
   (a) Montrer que, quelque soit l'entier naturel n non nul, I_n converge.
   (b) Donner une relation de récurrence sur (I_n) et en déduire une valeur pour I_n en fonction de N.
3. Soit $a > 0$. Par l'étude de l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(ln(x))^a}$ en fonction de a, déterminer si $\sum \frac{1}{n(ln(n))^a}$ converge en fonction de a.
4. (Bonus) On considère une fonction positive et continue définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = l \in]0;1[$. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.