Kholles MP B 11/10/2021

1 Questions de cours

Donner et démontrer l'inégalité de Cauchy Swartz dans $\mathbb{R}$.

2 Exercices

1. Montrer que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(t)}{cos(t)+sin(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(t)}{cos(t)+sin(t)}dt = \frac{\pi}{4}$$
En déduire
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$$
2. Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}$$
3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$$
   (a) Montrer que f est dérivable et que
$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t)dt$$
   (b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
   (c) Achever la résolution de cette équation différentielle.
4. Pour $x \in]0,1[$, on pose
$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{ln(t)}$$
   (a) Montrer que φ est bien définie et que cette fonction se prolonge par continuité en 0 et en 1.
   (b) En déduire la valeur de
$$\int_0^1 \frac{x-1}{ln(x)}dx$$
5. Calculer la limite de la suite :
$$u_n = (\frac{(2n)!}{n^n n!})^{\frac{1}{n}}$$
6. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose
$$\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$$
pour toute fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et s'annulant en a et b.
Montrer que f est la fonction nulle.